UNIVERSIDAD DE SEVILLA

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y EMPRESARIALES

DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA III

TESIS DOCTORAL

MODELOS ESTRATÉGICOS CON UTILIDADES MULTIDIMENSIONALES

Asunción Zapata Reina

Dirigida por:

Mª Ángeles Caraballo Pou   Luisa Monroy Berjillos

Sevilla, octubre de 2015

Dedicado a
mis padres y mi hermana

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi agradecimiento a las directoras de esta tesis doctoral, Dra. Mª Ángeles Caraballo Pou y Dra. Luisa Monroy Berjillos, así como a la Dra. Amparo Mª Mármol Conde, por la dedicación y apoyo que me han brindado. Gracias por la confianza depositada en mí. Asimismo, agradezco a mis compañeros del Departamento de Economía Aplicada III su apoyo personal y humano. Por último, y no por ello menos importante, a mi familia de todo corazón por su cariño y aliento constantes.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En la teoría de juegos multicriterio convergen la teoría de juegos tradicional y la optimización multicriterio. Los resultados y avances en este campo permiten representar y analizar situaciones de conflicto de intereses en las que intervienen varios decisores, cada uno de los cuales tiene más de un objetivo que alcanzar, es decir, las utilidades de los agentes decisores son multidimensionales y pueden representarse vectorialmente.

Los juegos con utilidades vectoriales difieren de los juegos escalares únicamente en la dimensión del pago, pero esto es suficiente para que muchos resultados de la teoría de juegos clásica no tengan una generalización directa. La razón fundamental es la dificultad añadida que supone trabajar con estructuras de orden parcial en los pagos, en lugar del orden total que induce una única función de valoración.

Entre las razones más importantes para estudiar juegos vectoriales destacamos que pueden utilizarse para modelizar muchas situaciones de la vida real, en las que hay que tener en cuenta varios objetivos, evitando definir funciones de escalarización a partir de información quizá no muy precisa. Por ejemplo, la política de producción de dos empresas que compiten en un mercado puede analizarse como un juego escalar. Sin embargo, cuando compiten simultáneamente en varios mercados y los resultados en cada uno de ellos no pueden agregarse, el estudio del problema conduce de forma natural a un juego con utilidad vectorial.

Los juegos vectoriales fueron introducidos por Blackwell (1956) y, desde entonces, esta teoría ha evolucionado de forma similar a la teoría de juegos convencional. Por un lado, se analiza el problema con el enfoque cooperativo y por otro, se considera el enfoque no cooperativo. Algunos resultados relativos a juegos vectoriales cooperativos podemos encontrarlos en problemas de negociación (Roemer, 2005; Mármol et al., 2007; de Marco y Morgan, 2011; Monroy et al., 2015), problemas de reparto de costes (Fernández et al., 2002; Nishizaki y Sakawa, 2001; Fernández et al., 2004) y en problemas de votación (Monroy y Fernández 2011, 2014). Con respecto a juegos vectoriales no cooperativos los trabajos se centran, entre otros, en la caracterización de nuevos conceptos de solución (Ghose y Prasad, 1989; Puerto et al., 1999; Yu y Li, 2000; Fernández et al., 2000a) modelos oligopolísticos (Kruś y Bronisz, 1994; Fernández et al., 2000b; Bade, 2005) y juegos con pagos difusos (Nishizaki y Sakawa, 2000; Peldschus y Zavadskas, 2005; Clemente et al., 2011).

El objetivo general de esta tesis es el estudio de procesos de toma de decisiones estratégicas con múltiples agentes, dentro del marco de la teoría de juegos no cooperativos con utilidades vectoriales. La característica común de los problemas que consideramos es que extienden los modelos clásicos a situaciones en las que la información disponible sobre los resultados y sobre las preferencias de los agentes no está completamente especificada. Este marco incluye situaciones en las que la incertidumbre sobre los resultados de la interacción estratégica es una cuestión relevante, y también situaciones en las que las preferencias de los agentes no se limitan al propio interés, sino que incorporan otras motivaciones sociales.

En juegos no cooperativos, caracterizados por el principio de racionalidad individual y por un comportamiento estratégico de sus jugadores, el concepto clásico de solución es el de equilibrio de Nash (Nash 1950, 1951). Este concepto lleva inherente una condición de estabilidad, ya que, fijadas las estrategias de los demás jugadores, ningún jugador puede mejorar su resultado cambiando su estrategia. En otras palabras, ningún jugador tiene incentivo para desviarse de su estrategia en equilibrio porque no encontrará una estrategia alternativa que mejore su utilidad.

La extensión de equilibrio de Nash al caso vectorial se consigue eligiendo como mejor respuesta de cada jugador a las estrategias de los demás jugadores, una solución eficiente del problema vectorial de maximización de su utilidad. En el Capítulo 2, para caracterizar el conjunto de equilibrios de Nash de un juego con utilidades vectoriales, consideramos la representación de las preferencias de los agentes mediante funciones utilitaristas e igualitaristas. Es usual que los agentes no puedan establecer de forma precisa las preferencias entre sus posibles resultados, por lo que esta falta de información potencial nos lleva a considerar que sólo disponemos de información parcial o incompleta sobre las preferencias de los agentes. En la literatura existente sobre modelos con preferencias incompletas, las dos referencias clásicas son Aumann (1962) y Bewley (1986). Posteriormente, estas estructuras de preferencias se han estudiado desde varios puntos de vista. En particular, algunos autores han establecido una conexión formal entre preferencias incompletas y decisión multiobjetivo bajo certidumbre y bajo riesgo (Seidenfeld et al., 1995; Ok, 2002; Dubra et al., 2004; Sagi, 2006).

La dificultad de la existencia de multiciplidad de equilibrios, que ya existe en muchos casos en los juegos escalares, se ve agravada en los juegos con utilidades vectoriales. Una forma de obtener procedimientos para reducir el conjunto de equilibrios del juego es incorporar en el modelo información adicional. Consideramos reglas de decisión adicionales basadas en diferentes actitudes de los agentes frente a los resultados que pueden obtener, analizando una actitud conservadora, optimista y neutral.

Una vez desarrollados estos resultados teóricos, en el Capítulo 3, los aplicamos en el análisis del modelo de bienes comunales (Hardin, 1968) y del modelo de oligopolio de Cournot (Cournot, 1838), que no han sido tratados aún desde esta perspectiva.

En el ámbito de las ciencias sociales, el problema de los bienes comunales se ha estudiado ampliamente pues la propiedad común de los recursos ha acompañado al hombre a lo largo de su historia. En un principio, los estudios se enfocaron en el peligro que el uso común de los recursos conlleva para la conservación, o para una explotación económica eficiente de dichos recursos. En la década de los cincuenta del pasado siglo, Gordon (1954) y Scott (1955) tratan los recursos comunes desde este punto de vista. El trabajo de Gordon analiza ciertas cuestiones relacionadas con la economía de la pesca y su gestión en las culturas primitivas, y el caso de los pastos comunales en la sociedad medieval. En la pesca, la propiedad común conduce a la sobrepesca y a la ineficiencia económica. Por ello, este autor concluye que la propiedad de todos es la propiedad de nadie. Del mismo modo, el trabajo de Scott insiste en esta idea y señala que nadie se preocupa de conservar los recursos a menos que sea su propietario, defendiendo, además, la propiedad única, que permite planificar el uso del recurso a través del tiempo de una manera económicamente más eficiente.

A partir del artículo de Hardin (1968), la expresión *tragedia de los comunes* ha llegado a simbolizar la degradación del ambiente que puede esperarse siempre que muchos individuos utilicen al mismo tiempo un recurso escaso. Si los únicos bienes comunales de importancia fueran unas cuantas áreas de pasto o algunas pesquerías, este problema tendría poco interés general. Pero no es el caso. La tragedia de los comunes se ha utilizado para describir problemas tan distintos como la hambruna del Subsahara en los años setenta (Picardi y Seifert, 1977), la crisis de incendios forestales en el tercer mundo (Thomson, 1977; Norman, 1984), el problema de la lluvia ácida (Wilson, 1985), las relaciones entre el sector público y el sector privado en las economías modernas (Scharpf 1987, 1988) o los problemas de cooperación internacional (Snidal, 1985), entre otros.

En el análisis del problema de los bienes comunales que presentamos hemos modificado un supuesto esencial de los modelos económicos tradicionales: el principio de racionalidad egoísta de los agentes. Según este principio, la única motivación de un agente es la búsqueda de su propio interés. Sin embargo, el comportamiento humano es mucho más complejo y la evidencia muestra que los agentes tienen otras motivaciones. Por tanto, la introducción de otros objetivos, además del beneficio individual que se presupone desde una perspectiva racional, no está tan lejos de la realidad. De esta forma, el carácter multidimensional de la utilidad aparece cuando se asume como función de utilidad la de todos los agentes implicados en el modelo, esto es, además del beneficio individual, los agentes consideran el beneficio de todos los competidores por la utilización del bien comunal. Desde esta perspectiva hemos analizado la posibilidad de evitar el problema de la sobreexplotación de los bienes comunales y su aniquilación. Hemos estudiado las consecuencias de la actitud altruista que muestren los agentes, así como las de otras características, tales como la ecuanimidad o la imparcialidad.

De la misma forma, hemos analizado en el modelo de oligopolio de Cournot las implicaciones que tiene el que las empresas, además de su propio beneficio, consideren los intereses de otros agentes económicos. El tratamiento tradicional del modelo de Cournot considera un número de empresas que producen un bien homogéneo. Tienen que determinar su nivel de producción actuando de forma estratégica y teniendo en cuenta que son económicamente racionales, es decir, buscan maximizar sus beneficios. Sin embargo, en los últimos años se ha empezado a dar importancia a una visión de la empresa basada en principios de responsabilidad social.

No hay una única definición de empresa socialmente responsable, pero podríamos resumirla como aquella empresa que se compromete a un comportamiento que tenga en cuenta no sólo el beneficio, sino también cómo las decisiones de la empresa afectan a otros agentes relacionados con ella, tales como empleados, otras empresas, consumidores y el medioambiente. En Bénabou y Tirole (2010) se presenta un estudio detallado sobre el significado de responsabilidad social en las empresas.

El análisis de la responsabilidad social y su impacto en el desarrollo de las empresas ha recibido una atención considerable dentro de la comunidad académica, especialmente en el campo de las ciencias sociales. Las primeras nociones de la relación entre empresa y sociedad aparecen en la década de los cincuenta del pasado siglo (Bowen, 1953). Más recientemente, existen investigaciones empíricas sobre rendimiento financiero y responsabilidad social (Margolis y Walsh, 2001) y análisis de la modelización formal de la responsabilidad social (Baron, 2001, 2007; Calveras et al., 2007; Giovanni y Giacinta, 2007). Crifo y Forget (2013) hacen una revisión bibliográfica de la literatura económica sobre responsabilidad social, tanto teórica como empírica. Kitzmueller y Shimshack (2012) también recogen una síntesis de la literatura correspondiente a las diversas líneas de estudio sobre responsabilidad social.

En el modelo de oligopolio de Cournot que estudiamos, hemos considerado que cada empresa busca su propio beneficio y también valora otras utilidades, ya sean los intereses de los consumidores mediante el excedente del consumidor, o bien alguna externalidad, tanto positiva como negativa. La novedad y ventaja del modelo que presentamos frente al tratamiento tradicional de las externalidades y la responsabilidad social en economía, es que mostramos un marco unificado de análisis en el que no tratamos la utilidad derivada del comportamiento social como un beneficio monetario adicional, puesto que no lo es, y tratarlo de esa forma pervierte la concepción misma de lo que consideramos social.

En el Capítulo 4, también dedicado al oligopolio de Cournot, estudiamos cómo afecta la incorporación de la incertidumbre en el modelo. La característica principal de los problemas de decisión bajo incertidumbe reside en el grado de conocimiento que el decisor tiene del entorno, del que conoce sus posibles concreciones, pero puede no tener ninguna información más.

En la literatura económica encontramos estudios que analizan el papel de la incertidumbre en los mercados oligopolísticos considerando, o bien que la función de demanda del mercado no es conocida, o bien que los costes marginales de las empresas se desconocen. Las metodologías más usuales que se aplican en el estudio de estos problemas son la teoría de la utilidad esperada (Sandmo, 1971; Fontini, 2005; Ryu y Kim, 2011), modelos estocásticos (Bischi et al., 2004; Anam et al., 2007; Chiarella y Szidarovszky, 2009) y juegos con dos etapas (Lu y Poddar, 2006; de Frutos y Fabra, 2011, Lepore, 2012).

En algunos modelos de oligopolio bajo incertidumbre se tiene en cuenta el intercambio de información entre las empresas. Con respecto a la incertidumbre en la demanda, Novshek y Sonnenschein (1982), Clarke (1983), Vives (1984), Li (1985) probaron que las empresas no se beneficiaban por intercambiar información. Con respecto a la incertidumbre en los costes marginales, las contribuciones más relevantes son las de Gal-Or (1986) y Shapiro (1986). Prueban que si las empresas producen productos substitutivos, entonces es más beneficioso para las empresas compartir información privada sobre sus costes. Posteriormente, Raith (1996) desarrolla un enfoque unificado en el que derivan las conclusiones de los trabajos anteriores como casos particulares.

El modelo que proponemos es una extensión del oligopolio de Cournot, en el que la incertidumbre en la demanda se origina porque las empresas se enfrentan a diferentes demandas de mercado en escenarios futuros y tienen que tomar sus decisiones antes de que el escenario real ocurra. El análisis que presentamos contribuye de varias formas a la literatura existente. En primer lugar, el modelo se formaliza como un juego con funciones de utilidad vectoriales, y desarrollamos nuestro estudio en un entorno no probabilístico pues, aunque los beneficios de las empresas dependen de los escenarios futuros, no se dispone de información acerca de la probabilidad de ocurrencia de dichos escenarios. Por tanto, los resultados sobre los equilibrios en la extensión del modelo de Cournot no se basan en suposiciones o creencias relativas a las distribuciones de probabilidad, por lo que nuestro análisis cubre situaciones en las que dicha información no se puede obtener. En segundo lugar, la incertidumbre de las empresas se refiere tanto al precio de reserva como al número de consumidores en el mercado, por lo que nuestro modelo va más allá de los casos discutidos en la literatura en los que la incertidumbre se considera sólo en una de las dos formas mencionadas. En tercer lugar, asumimos que no hay intercambio de información entre las empresas. En cuarto lugar, consideramos distintas actitudes al riesgo que pueden presentar las empresas. Finalmente, en la misma línea de la regla de decisión de la utilidad esperada maximin, introducida por Gilboa y Schmeidler (1989), analizamos el modelo considerando que las empresas pueden establecer un orden sobre la probabilidad de ocurrencia de los posibles escenarios.

1.1. Preliminares

A continuación, establecemos la notación, definiciones y resultados básicos que utilizamos en el desarrollo de este estudio.

Definición 1.1.1. Un juego en forma normal, $G = \{(A^i, u^i)_{i\in N}\}$, viene dado por el conjunto de los agentes $N = \{1, \ldots, n\}$, el conjunto de estrategias que puede adoptar el agente i, A^i, y la correspondencia $u^i : \times_{i\in N} A^i \to \mathbb{R}$, que es la función de utilidad del agente i.

Un perfil de estrategias de todos los agentes, $a = (a^1, \ldots, a^n)$, con $a^i \in A^i$, para un juego G se puede escribir como $a = (a^i, a^{-i})$, donde a^i es la estrategia del agente i, y $a^{-i} = (a^1, \ldots, a^{i-1}, a^{i+1}, \ldots, a^n)$ representa las estrategias de los restantes agentes.

Para establecer el concepto de solución en estos juegos se parte del supuesto de que los agentes son racionales, es decir, buscan maximizar su utilidad.

Definición 1.1.2. Un perfil de estrategias $a^* = (a^{*1}, \ldots, a^{*n})$ es un equilibrio de Nash para el juego $G = \{(A^i, u^i)_{i\in N}\}$ si $\nexists\, i \in N$ con $a^i \in A^i$ tal que $u^i(a^i, a^{*-i}) > u^i(a^*)$. Es decir, para cada agente i, a^{*i} es solución del problema $\max_{i\in N} u^i(a^i, a^{*-i})$.

Obsérvese que en un equilibrio de Nash, ningún agente tiene incentivos para desviarse unilateralmente de él.

La notación de las desigualdades vectoriales que consideramos es la siguiente. Sean $x, y \in \mathbb{R}^s$, $x > y$ significa $x_j > y_j$ para todo j; $x \geq y$ significa $x_j \geq y_j$ para todo j, con $y \neq 0$; y $x \geqq y$ significa que $x_j \geq y_j$ para todo j.

Denotamos los conjuntos

$\mathbb{R}^s_+ = \{y \in \mathbb{R}^s : y \geq 0\}$ y $\mathbb{R}^s_{++} = \{y \in \mathbb{R}^s : y > 0\}$,

$\Delta^s = \{y \in \mathbb{R}^s_+ : \sum_{j=1}^s y_j = 1\}$ y $\Delta^s_+ = \{y \in \mathbb{R}^s_{++} : \sum_{j=1}^s y_j = 1\}$.

Definimos a continuación algunos conceptos a los que haremos referencia posteriormente.

Definición 1.1.3. La envolvente convexa de $S \subset \mathbb{R}^s$ es el conjunto $con(S) = \{z \in \mathbb{R}^s : z = \alpha x + (1-\alpha)y,\ x, y \in S,\ \alpha \in [0,1]\}$.

Definición 1.1.4. Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^s$ es comprensivo si para cualquier $y \in S$ y para todo $\bar{y} \in \mathbb{R}^s$ tal que $y \geq \bar{y} \geq 0$, entonces $\bar{y} \in S$.

Definición 1.1.5. Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^s$ es estrictamente comprensivo si para cualquier $y \in S$ y para todo $\bar{y} \in \mathbb{R}^s$ tal que $y \geq \bar{y} \geq 0$, entonces $\bar{y} \in S$ y existe $z \in S, z > \bar{y}$.

Definición 1.1.6. Sea un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^s_+$

a) $\bar{y} \in S$ es eficiente en S si no existe $y \in S$ tal que $y \geq \bar{y}$. Denotamos por $Ef(S)$ el conjunto de puntos eficientes de S.

b) $\bar{y} \in S$ es débilmente eficiente (w-eficiente) en S si no existe $y \in S$ tal que $y > \bar{y}$. Denotamos por $Ef^w(S)$ el conjunto de puntos débilmente eficientes de S.

Estos dos conjuntos coinciden bajo hipótesis no muy restrictivas, por ejemplo, es suficiente que el conjunto S sea estrictamente comprensivo.

Proposición 1.1.7. *Si S es estrictamente comprensivo, entonces $Ef(S) = Ef^w(S)$*

Demostración. Por definición, se verifica que $Ef(S) \subseteq Ef^w(S)$. Para demostrar la otra inclusión, sea $\bar{y} \in Ef^w(S)$, entonces para cualquier $y > \bar{y}$, se tiene que $y \notin S$. Supongamos que no es eficiente, es decir, existe $y \in S$ tal que $y \geq \bar{y}, y \neq \bar{y}$. Como S es estrictamente comprensivo, entonces existe $z \in S, z > \bar{y}$, lo que contradice que $\bar{y}$ es w-eficiente. $\square$

Establecemos dos maneras de caracterizar los puntos eficientes y débilmente eficientes de S. En primer lugar, analizamos la relación entre estos puntos y las soluciones de los problemas escalares asociados que optimizan las sumas ponderadas de las componentes. Sea $\lambda \in \Delta^s$. Denotamos por $P_\lambda(S)$ el conjunto de soluciones óptimas del problema $\max_{x\in S} \sum_{j=1}^s \lambda_j x_j$,

$$P_\lambda(S) = \{y \in S : y = argmax_{x\in S} \sum_{j=1}^{s} \lambda_j x_j\}$$

Denotamos $P(S) = \cup_{\lambda\in\Delta^s} P_\lambda(S)$ y $P^+(S) = \cup_{\lambda\in\Delta^s_+} P_\lambda(S)$.

Proposición 1.1.8. *Sea un subconjunto $S \subset I\!R^s_+$*

a) Sea $\lambda \in \Delta^s$. Si $\bar{y} = argmax_{x\in S} \sum_{j=1}^s \lambda_j x_j$, entonces $\bar{y}$ es w-eficiente. Es decir, $P(S) \subseteq Ef^w(S)$.

b) Sea $\lambda \in \Delta^s_+$. Si $\bar{y} = argmax_{x\in S} \sum_{j=1}^s \lambda_j x_j$, entonces $\bar{y}$ es eficiente. Es decir, $P^+(S) \subseteq Ef(S)$.

Demostración. a) Sea $\lambda \in \Delta^s$. Si $\bar{y} = argmax_{x\in S} \sum_{j=1}^s \lambda_j x_j$, entonces se verifica que $\sum_{j=1}^s \lambda_j \bar{y}_j \geq \sum_{j=1}^s \lambda_j x_j$, $\forall x \in S$. Razonemos por reducción al absurdo, supongamos que no es w-eficiente, es decir, existe $\bar{x} \in S$ tal que $\bar{x} > \bar{y}$, entonces $\sum_{j=1}^s \lambda_j \bar{x}_j > \sum_{j=1}^s \lambda_j \bar{y}_j$, lo que contradice que $\bar{y}$ sea solución de $P(S)$. Luego, $\bar{y} \in Ef^w(S)$.

b) Sea $\lambda \in \Delta^s_+$. Si $\bar{y} = argmax_{x\in S} \sum_{j=1}^s \lambda_j x_j$, entonces $\sum_{j=1}^s \lambda_j \bar{y}_j \geq \sum_{j=1}^s \lambda_j x_j$, $\forall x \in S$. Supongamos que $\bar{y}$ no es eficiente, luego existe $\bar{x} \in S$ tal que $\bar{x} \geq \bar{y}$, entonces $\sum_{j=1}^s \lambda_j \bar{x}_j \geq \sum_{j=1}^s \lambda_j \bar{y}_j$, lo que contradice que $\bar{y}$ sea solución de $P^+(S)$. Luego, $\bar{y} \in Ef(S)$. □

Bajo ciertas hipótesis, todas las soluciones que se obtienen resolviendo los problemas $\max_{x\in S} \sum_{j=1}^s \lambda_j x_j$ son puntos eficientes, como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 1.1.9. *Sea $\lambda \in \Delta^s$, si $\bar{y}$ es solución única del problema $\max_{x\in S} \sum_{j=1}^s \lambda_j x_j$, entonces $\bar{y}$ es eficiente, $\bar{y} \in Ef(S)$.*

Demostración. La demostración es análoga a la de la Proposición 1.1.8, teniendo en cuenta la unicidad de solución del problema ponderado. □

Observación 1.1.10. En general, $P(S) \subseteq Ef^w(S)$ y $P^+(S) \subseteq Ef(S)$, y estas inclusiones pueden ser estrictas. Si S es convexo, $Ef^w(S) = P(S)$.

Por otra parte, determinamos la equivalencia entre puntos eficientes o débilmente eficientes, y las soluciones del problema maximin ponderado correspondiente. Sea $\alpha \in \Delta^s$. Denotamos por $M_\alpha(S)$ el conjunto de soluciones óptimas del problema maximin ponderado $\max_{x\in S} \min_{j=1,\dots,s}\{\frac{x_j}{\alpha_j}\}$,

$$M_\alpha(S) = \{y \in S : y = argmax_{x\in S} \min_{j=1,\dots,s}\{\frac{x_j}{\alpha_j}\}\}$$

Se entiende que si algún peso es nulo, $\alpha_j = 0$, no se considera el cociente correspondiente. Denotamos $M(S) = \cup_{\alpha\in\Delta^s} M_\alpha(S)$ y $M^+(S) = \cup_{\alpha\in\Delta^s_+} M_\alpha(S)$

Proposición 1.1.11. *Sea un subconjunto $S \subset I\!R^s_+$*

a) Sea $\alpha \in \Delta^s$. Si $\bar{y} = argmax_{x\in S} \min_{j=1,\dots,s}\{\frac{x_j}{\alpha_j}\}$, entonces $\bar{y}$ es w-eficiente. Es decir, $M(S) \subseteq Ef^w(S)$.

b) Si $\bar{y}$ es eficiente, entonces $\exists \alpha \in \Delta^s$, tal que $\bar{y} = argmax_{x\in S} \min_{j=1,\dots,s}\{\frac{x_j}{\alpha_j}\}$, es decir, $Ef(S) \subseteq M(S)$.

Demostración. a) Sea $\alpha \in \Delta^s$. Si $\bar{y} = argmax_{x\in S} \min_{j=1,...,s}\{\frac{x_j}{\alpha_j}\}$, se verifica que $\min_{j=1,...,s}\{\frac{\bar{y}_j}{\alpha_j}\} \geq \min_{j=1,...,s}\{\frac{x_j}{\alpha_j}\}$, $\forall x \in S$. Razonemos por reducción al absurdo, supongamos que existe $\bar{x} \in S$ tal que $\bar{x} > \bar{y}$, entonces $\min_{j=1,...,s}\{\frac{\bar{x}_j}{\alpha_j}\} > \min_{j=1,...,s}\{\frac{\bar{y}_j}{\alpha_j}\}$, lo que contradice la hipótesis. Luego, $\bar{y} \in Ef^w(S)$.

b) Sea $\alpha_j = \bar{y}_j$. Para probar que $\bar{y} = argmax_{x\in S} \min_{j=1,...,s}\{\frac{x_j}{\bar{y}_j}\}$, supongamos que existe $y \in S$, tal que $\min_{j=1,...,s}\{\frac{y_j}{\bar{y}_j}\} > \min_{j=1,...,s}\{\frac{\bar{y}_j}{\bar{y}_j}\} = 1$. Por tanto, $y_j > \bar{y}_j$ para todo $j = 1, ..., s$, lo que contradice que $\bar{y}$ sea eficiente. Así, $\bar{y} \in M(S)$. □

Observación 1.1.12. En general, se verifica $Ef(S) \subseteq M(S) \subseteq Ef^w(S)$. Incluso para $\alpha \in \Delta^s_+$, las inclusiones pueden ser estrictas. No obstante, bajo las condiciones en las que los puntos eficientes y los débilmente eficientes son los mismos, $Ef(S) = Ef^w(S)$, éstos coinciden con las soluciones óptimas de los problemas $\max_{x\in S} \min_{j=1,...,s}\{\frac{x_j}{\alpha_j}\}$, con $\alpha \in \Delta^s_+$, es decir, $Ef(S) = M(S) = Ef^w(S)$.

Existen otros resultados relacionados que permiten caracterizar todos los puntos w-eficientes bajo ciertas hipótesis.

Proposición 1.1.13. *Sea $S \subset I\!R^s_{++}$, $\bar{y}$ es punto w-eficiente de S si y sólo si es $\bar{y} = argmax_{x\in S} \min_{j=1,...,s}\{\frac{x_j}{\alpha_j}\}$ con $\alpha_j > 0, \forall j = 1, ..., s$, es decir, $M^+(S) = Ef^w(S)$.*

Demostración. La inclusión $M^+(S) \subseteq Ef^w(S)$ se cumple dado que $M^+(S) \subseteq M(S)$ y por la Proposición 1.1.11 a), $M(S) \subseteq Ef^w(S)$. Probemos la otra inclusión. Si $\bar{y}$ es w-eficiente, sea $\alpha = \bar{y} > 0$. Para probar que $\bar{y} = argmax_{x\in S} \min_{j=1,...,s}\{\frac{x_j}{\bar{y}_j}\}$, supонemos lo contrario, es decir, $\exists y \in S$, $y \neq \bar{y}$, tal que $\min_{j=1,...,s}\{\frac{y_j}{\bar{y}_j}\} > \min_{j=1,...,s}\{\frac{\bar{y}_j}{\bar{y}_j}\} = 1$. Por tanto, $y_j > \bar{y}_j$ para todo j, lo que contradice que $\bar{y}$ sea w-eficiente. Por tanto, $Ef^w(S) \subseteq M^+(S)$. □

Capítulo 2

Equilibrios en juegos con utilidades multidimensionales

2.1. Introducción

La extensión natural del concepto de equilibrio de Nash para un juego con funciones de utilidad vectoriales fue introducida por Shapley (1959) para juegos bipersonales multiobjetivo de suma nula y de suma no nula. Entre los autores que estudiaron la existencia de equilibrio de Pareto para este tipo de juegos, utilizando técnicas de escalarización con un vector de pesos, destacamos a Zeleny (1975), Corley (1985) y Borm et al. (1988).

Para juegos multiobjetivos n-personales, Zhao (1991) y Wang (1993) establecieron condiciones suficientes que garantizan la existencia de equilibrio de Pareto. La mayoría de los resultados sobre la existencia de estos equilibrios se basa en los teoremas del punto fijo y en las desigualdades minimax de Kay Fan. Algunos de estos resultados están recogidos en Yu y Yuan (1998), Kim (2000), Allevi et al. (2003), Chebbi (2008) y Patriche (2014).

Bade (2005) estudia la existencia de equilibrios de Pareto para las extensiones multidimensionales de distintos modelos económicos clásicos. Considera juegos con pagos vectoriales en los que las preferencias de los agentes son incompletas, que pueden representarse mediante funciones de utilidad vectoriales. Caracteriza el conjunto de equilibrios de dichos juegos como la unión de los conjuntos de equilibrios de determinados juegos escalares, en los que las preferencias de los agentes son completas.

En este contexto se enmarca nuestro estudio. Consideramos juegos con preferencias incompletas representadas por funciones de utilidad vectoriales. Los conjuntos de equilibrios de los juegos con este tipo de preferencias son, en general, considerablemente más amplios que los de los juegos con preferencias completas. Aunque este hecho pueda parecer un inconveniente, permite solucionar problemas de no existencia de equilibrio en juegos en los que, por razones operativas, se han modelado las preferencias de los agentes como completas, aún no disponiendo de toda la información. Esto permite ampliar el conjunto de equilibrios original, resolviendo de este modo el problema de la no existencia. Esta es la forma en que Roemer (1999, 2001) y Bade (2003) abordan el problema de la no existencia de equilibrio en modelos de competición política multidimensional entre dos partidos políticos.

El tratamiento de las preferencias incompletas se puede realizar desde distintas perspectivas. En nuestro estudio consideramos dos modelos: el utilitarista (Mill, 1971) y el igualitarista (Rawls, 1971). Desde un punto de vista utilitarista, con objeto de conseguir el máximo bienestar para los agentes, se maximiza la suma ponderada de las componentes de su función de utilidad vectorial. Por otra parte, el igualitarismo persigue valorar a los menos favorecidos basándose en los principios de igualdad de oportunidades, por lo que se maximiza el mínimo de las componentes ponderadas de la función de utilidad vectorial de los agentes.

Estas representaciones de las preferencias fueron estudiadas en el campo de la teoría de la decisión multicriterio por Hinojosa y Mármol (2011). Nosotros aplicamos ambos modelos para el estudio de los equilibrios en los juegos con pagos vectoriales. En los dos casos, las ponderaciones o pesos utilizados para formalizar la función de valoración se pueden interpretar como la importancia relativa asignada a las diferentes utilidades individuales.

En general, en los juegos con utilidades vectoriales el conjunto de equilibrios es amplio, por lo que es conveniente obtener refinamientos de ellos incorporando consideraciones adicionales. La introducción en el problema de información adicional sobre las preferencias de los agentes, que estableceremos mediante conjuntos de pesos, nos permite obtener diferentes subconjuntos de los equilibrios más acordes con la información disponible. Es también posible refinar la identificación de los equilibrios incorporando las distintas actitudes que los agentes pueden mostrar a la hora de elegir sus estrategias.

En la siguiente sección de este capítulo se definen y caracterizan los equilibrios de Nash generalizados para un juego vectorial. A continuación, se establecen diferentes formas de caracterización de las preferencias de los agentes, desde los puntos de vista utilitarista e igualitarista, analizando la determinación de los equilibrios en cada contexto. Y, por último, se realizan algunos refinamientos de los equilibrios de Nash teniendo en cuenta diversas características del comportamiento de los agentes.

2.2. Equilibrio de Nash

Un juego vectorial en forma normal viene representado por $G = \{(A^i, u^i)_{i\in N}\}$, donde $N = \{1, \ldots, n\}$ es el conjunto de los agentes, A^i es el conjunto de estrategias que puede adoptar el agente i y la correspondencia $u^i : \times_{i\in N} A^i \to \mathbb{R}^{s^i}$ es la función de utilidad vectorial del agente i, $u^i := (u^i_1, \ldots, u^i_{s^i})$. Sea $J^i = \{1, ..., s^i\}$.

Un perfil de estrategias de todos los agentes, $a = (a^1, \ldots, a^n)$, con $a^i \in A^i$, para un juego G se puede escribir como $a = (a^i, a^{-i})$, donde a^i es la estrategia del agente i, y $a^{-i} = (a^1, \ldots, a^{i-1}, a^{i+1}, \ldots, a^n)$ representa las estrategias de los restantes agentes.

La siguiente definición generaliza el concepto clásico de equilibrio de Nash en el sentido de Pareto. Establece que un perfil de estrategias a^* es un equilibrio de Nash si y sólo si ningún agente obtiene un resultado preferido al del equilibrio modificando su posición, si el resto no modifica la suya.

Definición 2.2.1. Un perfil de estrategias $a^* = (a^{*1}, \ldots, a^{*n})$ es un equilibrio de Nash para el juego $G = \{(A^i, u^i)_{i\in N}\}$ si $\nexists\, i \in N$ con $a^i \in A^i$ tal que $u^i(a^i, a^{*-i}) \geq u^i(a^*)$.

Denotamos $E(G)$ al conjunto de todos los equilibrios de Nash de un juego G.

Alternativamente, se puede escribir que a^* es un equilibrio para el juego G si $\forall i \in N$, $\forall a^i \in A^i$, $u^i(a^i, a^{*-i}) \ngeq u^i(a^*)$.

El equilibrio de Nash no lleva a lograr el mejor resultado conjunto para todos los participantes, sino a que todos los agentes obtengan una utilidad individual que sea no dominada, teniendo en cuenta que cada uno de los agentes va a intentar hacer su mejor jugada.

Dado que la utilidad individual viene dada por una función vectorial, determinar un equilibrio de Nash del juego G incluye considerar soluciones en el sentido de Pareto de problemas de decisión multicriterio, por lo que a los equilibrios de Nash de este tipo de juegos se les llama también equilibrios de Pareto. De hecho, un perfil de estrategias, a^*, es un equilibrio de Nash para el juego $G = \{(A^i, u^i)_{i\in N}\}$ si para todo $i \in N$, a^{*i} es una solución eficiente del problema de optimización vectorial $\text{máx}_{a^i\in A^i}\, u^i(a^i, a^{*-i})$.

Para un agente i, denotamos por R^i a la correspondencia de mejor respuesta del agente i. En el caso de utilidades vectoriales, la mejor respuesta de un agente a una acción de los demás agentes no es, en general, única, sino que es un subconjunto de su conjunto de estrategias, $R^i(a^{-i}) \subseteq A^i$. Coincide con las estrategias de dicho agente tales que si se desvía de ellas no mejora su función de utilidad en todas sus componentes.

Definición 2.2.2. Una estrategia a^{*i} es una mejor respuesta del agente i a las estrategias de los restantes agentes a^{*-i} en el juego $G = \{(A^i, u^i)_{i \in N}\}$, $a^{*i} \in R^i(a^{*-i})$, si y sólo si $\nexists\, a^i \in A^i$ tal que $u^i(a^i, a^{*-i}) \geq u^i(a^*)$.

Como consecuencia, un perfil de estrategias $a^* = (a^{*i}, a^{*-i})$ es un equilibrio de Nash para el juego $G = \{(A^i, u^i)_{i \in N}\}$ si y sólo si $a^{*i} \in R^i(a^{*-i})$ para cada agente i. De este modo, los equilibrios de Nash se pueden calcular como la intersección de todos los conjuntos de perfiles de estrategias $(R^i(a^{-i}), a^{-i})$.

Para identificar todos los equilibrios de Nash, consideramos la reacción de cada agente teniendo en cuenta cada función componente u^i_j de su función de utilidad vectorial, para $i \in N, j \in J^i$, a la que denotamos r^i_j. Para el agente i, la j-ésima componente de u^i, u^i_j, proporciona la correspondencia de mejor respuesta r^i_j, como en el juego escalar con función de pagos u^i_j.

De este modo, se puede establecer que, bajo determinadas condiciones de convexidad, el conjunto de reacción para cada agente viene delimitado por el mínimo y el máximo de las funciones de mejor respuesta para cada perfil de estrategias.

Lema 2.2.3. *Para el juego $G = \{(A^i, u^i)_{i \in N}\}$, tal que cada A^i es un conjunto convexo no vacío de un espacio euclídeo de dimensión finita y $\forall i \in N$, u^i_j es estrictamente cóncava en su propia acción para cada $j \in J^i$, entonces*

$$R^i(a^{-i}) = \{a^i \in A^i : \underline{r}^i(a^{-i}) \leq a^i \leq \bar{r}^i(a^{-i})\}.$$

donde $\underline{r}^i(a^{-i}) = \min_{j=1,\ldots,s^i} \; r^i_j(a^{-i})$ *y* $\bar{r}^i(a^{-i}) = \max_{j=1,\ldots,s^i} \; r^i_j(a^{-i})$.

Demostración. Cualquier estrategia a^i tal que $a^i < \underline{r}^i(a^{-i})$ no está en el conjunto de reacción, $R^i(a^{-i})$, porque hay un valor $\underline{a}^i = \underline{r}^i(a^{-i})$, tal que $u^i_j(\underline{a}^i, a^{-i}) \geq u^i_j(a^i, a^{-i})$, de modo que las componentes u^i_j no disminuyen ya que son estrictamente cóncavas en su acción y alcanzan su máximo en $r^i_j(a^{-i})$, por lo que $a^i \notin R^i(a^{-i})$. Análogamente, si $a^i > \bar{r}^i(a^{-i})$, en $(\bar{a}^i, a^{-i})$, con $\bar{a}^i = \bar{r}^i(a^{-i})$ las componentes no disminuyen, por tanto, $a^i \notin R^i(a^{-i})$.

Si a^i verifica $\underline{r}^i(a^{-i}) \leq a^i \leq \bar{r}^i(a^{-i})$, distinguimos varios casos.

En primer lugar, si $a^i = \underline{r}^i(a^{-i})$, entonces en $a^i + \varepsilon$, para cualquier $\varepsilon > 0$ la componente que proporciona el mínimo de las funciones de mejor respuesta disminuye, y las restantes no disminuyen, puesto que cada componente de la función de utilidad es estrictamente cóncava en su propia acción; para $a^i - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, disminuyen todas las componentes de la función de utilidad. Por tanto, $a^i \in R^i(a^{-i})$. Análogamente, si $a^i = \bar{r}^i(a^{-i})$, entonces en $a^i + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, disminuyen todas las componentes de la función de utilidad ; en $a^i - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$, la componente que proporciona el máximo de las funciones de mejor respuesta disminuye y las demás no disminuyen, debido a la concavidad de cada componente de la función de utilidad. Luego, $a^i \in R^i(a^{-i})$.

Por otra parte, si $\underline{r}^i(a^{-i}) < a^i < \bar{r}^i(a^{-i})$, ante cualquier desviación $a^i + \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, como cada componente de la función de utilidad es estrictamente cóncava en su acción, la componente que proporciona el mínimo de las funciones de mejor respuesta disminuye y la que proporciona el máximo no disminuye; al contrario ocurre para $a^i - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. Es decir, $a^i \in R^i(a^{-i})$. □

Nótese que si las funciones u^i_j son cóncavas, se puede demostrar un resultado análogo, teniendo en cuenta que la reacción r^i_j no tiene que ser única.

El siguiente resultado identifica el conjunto de todos los posibles equilibrios de Nash del juego vectorial.

Proposición 2.2.4. *Si cada A^i es un conjunto convexo no vacío de un espacio euclídeo de dimensión finita y $\forall i \in N$, u^i_j es estrictamente cóncava en su propia acción para cada $j \in J^i$, el conjunto de equilibrios de Nash para el juego $G = \{(A^i, u^i)_{i\in N}\}$ es*

$$E(G) = \{(a^1, \ldots, a^n) : \underline{r}^i(a^{-i}) \leq a^i \leq \bar{r}^i(a^{-i}), i \in N\}.$$

Demostración. Para cada agente i el conjunto de mejor respuesta a cada perfil de estrategias de los demás agentes a^{-i} es $R^i(a^{-i}) = \{a^i : \underline{r}^i(a^{-i}) \leq a^i \leq \bar{r}^i(a^{-i})\}$. El conjunto de equilibrios de Nash del juego G coincide con la intersección de los conjuntos $(R^i(a^{-i}), a^{-i})$, con lo que se tiene el resultado. □

A continuación, definimos el concepto de equilibrio débil, como la extensión del concepto de equilibrio de Nash usando la noción de eficiencia débil.

Definición 2.2.5. Un perfil de estrategias $a^* = (a^{*1}, \ldots, a^{*n})$ es un equilibrio débil para el juego $G = \{(A^i, u^i)_{i \in N}\}$ si $\nexists\, i \in N$ con $a^i \in A^i$ tal que $u^i(a^i, a^{*-i}) > u^i(a^*)$.

$E^d(G)$ denota el conjunto de equilibrios débiles del juego G.

Alternativamente, se puede escribir que a^* es un equilibrio débil para el juego G si $\forall i \in N$, $\forall a^i \in A^i$, $u^i(a^i, a^{*-i}) \ngtr u^i(a^*)$.

Por tanto, un equilibrio débil conlleva que cada uno de los agentes, desviándose independientemente, no puede obtener un resultado que mejore todas las componentes de su función de utilidad con respecto al equilibrio.

En este caso, un perfil de estrategias, a^*, es un equilibrio débil del juego G si $\forall i \in N$, a^{*i}, es una solución débilmente eficiente (w-eficiente) del problema $\max_{a^i \in A^i} u^i(a^i, a^{*-i})$.

Observación 2.2.6. Cuando las funciones u^i_j son estrictamente cóncavas y los conjuntos de estrategias son convexos, el conjunto de equilibrios débiles coincide con el conjunto de equilibrios de Nash, $E^d(G) = E(G)$. Este resultado se sigue del hecho de que, en esas condiciones, las soluciones eficientes y débilmente eficientes del problema $\max_{a^i \in A^i} u^i(a^i, a^{*-i})$ coinciden.

Los juegos con utilidades vectoriales que estamos tratando son juegos con preferencias incompletas. A continuación, vamos a abordar el análisis de los equilibrios que se alcanzan cuando los agentes eligen sus mejores respuestas utilizando diferentes representaciones de sus preferencias. Para ello, utilizaremos algunos enfoques tradicionales de la teoría de la decisión y, dado que identificar los equilibrios de Nash con utilidad vectorial involucra problemas de optimización multicriterio, podemos utilizar métodos que han sido ampliamente tratados en la literatura. Consideramos fundamentalmente dos modelos de representación de las preferencias de los agentes: el modelo en el que las preferencias se representan como la maximización de una suma ponderada de las componentes de la función de utilidad, y otro en el que las preferencias se representan por la maximización de los mínimos ponderados.

2.3. Representación aditiva de las preferencias y equilibrios

Bajo determinados supuestos no muy restrictivos, se pueden racionalizar las preferencias de los agentes mediante una función de valor aditiva (Keeney y Raiffa, 1976). El enfoque utilitarista recomienda maximizar el bienestar agregado de los agentes, que se materializa en una representación de las preferencias consistente en la suma ponderada de las componentes de la función de utilidad vectorial.

Si las preferencias fuesen completas, los pesos estarían determinados; por tanto, las preferencias de cada agente se representarían por una función escalar y los equilibrios consistirían en las estrategias que son óptimas para cada agente, dadas las estrategias del resto de agentes.

Formalmente, fijado el vector de pesos de las utilidades para el agente i, $\lambda^i \in \Delta^{s^i} = \{\lambda^i \in \mathbb{R}^{s^i} : \sum_{j=1}^{s^i} \lambda^i_j = 1, \lambda^i_j \geq 0\}$, la valoración que hace el agente i del perfil de estrategias $a \in \times_{i=1}^n A^i$ viene dada por la expresión $\sum_{j=1}^{s^i} \lambda^i_j u^i_j(a)$.

Sea $\Delta = \times_{i=1}^n \Delta^{s^i}$. Dado $\lambda \in \Delta$, sea $G_\lambda = \{(A^i, v^i_\lambda)_{i\in N}\}$ el juego escalar, donde

$$v^i_\lambda(a) = \sum_{j=1}^{s^i} \lambda^i_j u^i_j(a).$$

Un perfil de estrategias de los agentes, a^*, es un equilibrio de Nash para el juego G_λ si $\nexists\, i \in N$ con $a^i \in A^i$ tal que $v_\lambda(a^i, a^{*-i}) > v_\lambda(a^*)$.

Para cada $\lambda \in \Delta$, el conjunto de equilibrios de Nash del juego $G_\lambda = \{(A^i, v^i_\lambda)_{i\in N}\}$ se denota como $E^{ut}(G_\lambda)$.

En caso de preferencias incompletas con utilidades vectoriales, si para cada agente i consideramos todos los posibles valores de los pesos de Δ^{s^i}, se tienen todas las representaciones aditivas de las preferencias.

La primera cuestión que se plantea es si existe una relación entre el conjunto de equilibrios de Nash del juego G y el conjunto de estrategias de equilibrio que se obtendrían considerando todas las representaciones obtenidas con todos los posibles pesos. Para cualquier vector de pesos λ^i tal que $\lambda^i_j > 0, \forall j \in J^i$, la función de valor v^i_λ representa una completación de las preferencias del agente i. Denotamos por $\Delta^+ = \{\lambda \in \Delta : \lambda^i_j > 0, i \in N, j \in J^i\}$.

El siguiente teorema establece un resultado general sobre las relaciones entre estos conjuntos.

Teorema 2.3.1. *Sea* $G = \{(A^i, u^i)_{i\in N}\}$ *un juego con utilidades vectoriales. Entonces*

a) $\cup\{E^{ut}(G_\lambda) : \lambda \in \Delta^+\} \subseteq E(G)$.

b) $\cup\{E^{ut}(G_\lambda) : \lambda \in \Delta\} \subseteq E^d(G)$.

Demostración. a) Sea $a^* \in E^{ut}(G_\lambda)$ con $\lambda \in \Delta^+$, entonces para cada $i \in N, a^{*i}$ es solución del problema $\max_{a^i \in A^i} v^i_\lambda(a^i, a^{*-i})$. Es decir, a^{*i} es máximo de $\sum_{j=1}^{s^i} \lambda^i_j u^i_j(a^i, a^{*i})$, para $\lambda^i \geq 0$. Por tanto, $\forall i \in N, a^{*i}$ es una solución eficiente del problema de optimización vectorial $\max_{a^i \in A^i} u^i(a^i, a^{*-i})$, y a^* es un equilibrio del juego G.

b) La demostración es análoga, teniendo en cuenta la definición de equilibrio débil. □

Observación 2.3.2. Aunque las ponderaciones no negativas no proporcionan necesariamente completaciones del juego en el sentido que establece Bade (2005), el resultado determina que los equilibrios de los juegos ponderados con pesos no negativos son equilibrios débiles del juego con utilidades vectoriales. Por otra parte, la inclusión puede ser estricta, es decir, pueden existir equilibrios débiles que no se puedan determinar utilizando valoraciones utilitaristas, ya que, en general, puede haber soluciones eficientes no soportadas.

La relación entre los equilibrios de Nash del juego vectorial y los equilibrios de los juegos ponderados con pesos positivos y con pesos no negativos se establece en el siguiente resultado.

Teorema 2.3.3. *(Bade, 2005) Sea $G = \{(A^i, u^i)_{i \in N}\}$ un juego tal que cada A^i es un conjunto convexo no vacío de un espacio euclídeo de dimensión finita y cada u^i es cóncava en a^i. Entonces*

$$\cup\{E^{ut}(G_\lambda) : \lambda \in \Delta^+\} \subseteq E(G) \subseteq \cup\{E^{ut}(G_\lambda) : \lambda \in \Delta\}.$$

Este resultado proporciona una cota superior y otra inferior del conjunto de los equilibrios de Nash. Los dos conjuntos que acotan a los equilibrios de Nash, en general, no son muy distintos. De hecho, si las componentes de las funciones de utilidad son estrictamente cóncavas, todos los conjuntos coinciden. Así, establece la siguiente caracterización de los equilibrios de Nash.

Teorema 2.3.4. *(Bade, 2005) Sea $G = \{(A^i, u^i)_{i \in N}\}$ un juego tal que cada A^i es un conjunto convexo no vacío de un espacio euclídeo de dimensión finita y cada componente de u^i es estrictamente cóncava en a^i. Entonces*

$$E(G) = \cup\{E^{ut}(G_\lambda) : \lambda \in \Delta\}.$$

Este teorema permite importar resultados de juegos con preferencias completas a juegos con preferencias incompletas. En particular, establece que las completaciones lineales proporcionan un buen camino a seguir. Existen otros resultados que permiten establecer la existencia de equilibrios bajo distintos supuestos (Shafer y Sonneschein, 1975; Wang, 1991; Yu y Yuan, 1998; Ding, 2000).

2.3.1. Equilibrios con información parcial

La identificación de todos los equilibrios de Nash no siempre es útil en términos operativos, dada la gran cantidad de equilibrios que pueden existir. Además, dependiendo de la situación, en ocasiones no todos los equilibrios pueden ser adoptados por los agentes. Es, por tanto, aconsejable el estudio de los refinamientos del conjunto de equilibrios de Nash incorporando consideraciones adicionales. En el juego con utilidades vectoriales y suponiendo que la función de valor es aditiva, estudiaremos los efectos de incluir la información disponible sobre las preferencias de los agentes en el análisis, con objeto de determinar subconjuntos de equilibrios de Nash del juego, más acordes con las preferencias de los agentes.

Consideremos un subconjunto de pesos para cada agente, $\Lambda^i \subseteq \Delta^{s^i}$, que contiene la información parcial sobre sus preferencias representadas por una función de valor aditiva. Denotamos $\Lambda = \times_{i\in N}\Lambda^i$ y sea $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ el juego con la información suministrada sobre las preferencias.

Definición 2.3.5. Un perfil de estrategias a^* es un equilibrio utilitarista para el juego con información parcial $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ si $\forall i \in N, \exists \lambda^i \in \Lambda^i$ tal que $\lambda^i u^i(a^{*i}, a^{*-i}) \geq \lambda^i u^i(a^i, a^{*-i})$ para todo $a^i \in A^i$.

Denotamos el conjunto de equilibrios de Nash del juego con información parcial $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ como $E^{ut}(G_\Lambda)$. Es decir, $E^{ut}(G_\Lambda) = \cup\{E^{ut}(G_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$.

En el caso en que no se disponga de información sobre las preferencias, es decir, $\Lambda^i = \Delta^{s^i}$ para cada $i \in N$, se obtienen todos los equilibrios, $\cup\{E^{ut}(G_\lambda) : \lambda \in \Delta\}$, que, en general, son equilibrios débiles utilitaristas. Es fácil demostrar que si $\Lambda' \subset \Lambda$, entonces $E^{ut}(G_{\Lambda'}) \subseteq E^{ut}(G_\Lambda)$. Como consecuencia de este resultado, puede reducirse el conjunto de equilibrios de Nash utilizando un refinamiento adecuado de la información sobre las preferencias. El caso extremo es cuando la información sobre las preferencias se concreta en un vector de pesos para cada agente. En este caso, se trata de preferencias completas y el equilibrio se corresponde con el concepto estándar de equilibrio de Nash para una función de utilidad escalar.

Incorporamos la información adicional suministrada por los agentes acerca de sus preferencias mediante conjuntos de pesos que, en general, son diferentes para cada agente. Hay conjuntos de pesos particulares especialmente interesantes, como aquellos que vienen dados por restricciones lineales sobre los pesos, debido a que suponen un punto de partida natural en el estudio y, sobre todo, a que la estructura lineal hace posible el estudio de estos casos mediante una transformación del juego. La información suministrada sobre los pesos en estos casos describe un poliedro, que se puede caracterizar a partir de sus puntos extremos.

El siguiente resultado identifica el conjunto de equilibrios de Nash con información parcial sobre las preferencias con el conjunto de equilibrios de un juego con utilidades vectoriales que es una transformación del original.

Para $i \in N$, sea Λ^i un poliedro con p^i puntos extremos $\{\bar{\lambda}^i(1), \dots \bar{\lambda}^i(p^i)\}$, y sea B^i la matriz de orden $p^i \times s^i$ cuyas filas son dichos puntos extremos.

Teorema 2.3.6. *El conjunto de equilibrios utilitaristas para el juego con información parcial* $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i \in N}\}$ *coincide con el conjunto de equilibrios débiles del juego* $\{(A^i, v^i_\Lambda)_{i \in N}\}$*, donde para cada* $i \in N$*,* v^i_Λ *es una función aditiva con valores en* $I\!R^{p^i}$ *definida como* $v^i_\Lambda = B^i \cdot u^i$.

Demostración. Si a^* es un equilibrio utilitarista del juego G_Λ, para cada $i \in N$ existe $\lambda^i \in \Lambda^i$ tal que a^* es un equilibrio del juego G_λ. Por tanto, $\lambda^i \cdot u^i(a^*) \geq \lambda^i \cdot u^i(a^i, a^{*-i})$, $\forall a^i \in A^i$. Por otra parte, para cada $i \in N$, $\lambda^i \in \Lambda^i$ se puede expresar como $\lambda^i = \sum_{r=1}^{p^i} \beta^i_r \bar{\lambda}^i(r)$, con $\beta^i_r \geq 0$, $\sum_{r=1}^{p^i} \beta^i_r = 1$, de donde para cada $i \in N$ $\sum_{r=1}^{p^i} \beta^i_r \bar{\lambda}^i(r) \cdot u^i(a^*) \geq \sum_{r=1}^{p^i} \beta^i_r \bar{\lambda}^i(r) \cdot u^i(a^i, a^{*-i})$. Se sigue del Teorema 2.3.1 que a^* es un equilibrio débil del juego $\{(A^i, v^i_\Lambda)_{i \in N}\}$.

Recíprocamente, si a^* es un equilibrio débil del juego $\{(A^i, v^i_\Lambda)_{i \in N}\}$, entonces $\bar{\lambda}^i(r) \cdot u^i(a^*) \geq \bar{\lambda}^i(r) \cdot u^i(a^i, a^{*-i})$, para todo $i \in N$, para todo $r = 1, ..., p^i$ y, por definición de equilibrio de G_Λ, a^* es un equilibrio utilitarista del juego G_Λ. □

Observación 2.3.7. Con la transformación que se establece en el teorema anterior, se obtiene de nuevo un juego vectorial, por lo que la dificultad computacional del tratamiento del mismo puede ser incluso mayor que la del problema original. Pero aún así, los equilibrios obtenidos son más acordes con las preferencias de los agentes, puesto que incorporan la información adicional.

2.3.2. Equilibrios conservadores

Sea $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ el juego con la información suministrada sobre las preferencias. Aún cuando los agentes no hayan identificado unos pesos que representen exactamente sus preferencias, en ocasiones pueden adoptar diversas actitudes o tener ciertas valoraciones sobre los resultados que finalmente van a obtenerse. Y en general, en ambientes de incertidumbre, aunque no se disponga de ninguna información, se pueden utilizar distintas reglas de decisión. Así, se puede considerar un enfoque conservador o pesimista del juego, en el que el agente i valora el perfil de estrategias a como la peor valoración que puede alcanzar en su conjunto de pesos aceptables, es decir, la función de valor es:

$$v_c^{\Lambda^i}(a) = \min_{\lambda^i \in \Lambda^i} \sum_{j=1}^{s^i} \lambda_j^i u_j^i(a)$$

donde λ^i es el vector de pesos de importancia de las utilidades para el agente i.

Por tanto, la elección de una estrategia depende del mínimo valor ponderado de las utilidades individuales. Este enfoque está basado en el criterio consistente en la maximización de la mínima ganancia, es decir, lo mejor que puede conseguir un agente si se dan las peores condiciones posibles. Está en la línea de los trabajos sobre utilidad esperada maximin realizados por Gilboa y Scmeidler (1989).

Definición 2.3.8. Un perfil de estrategias a^* es un equilibrio conservador para el juego $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ si $\nexists\, i \in N$ con $a^i \in A^i$ tal que $v_c^{\Lambda^i}(a^i, a^{*-i}) > v_c^{\Lambda^i}(a^*)$.

Equivalentemente, $\forall i \in N$, $v_c^{\Lambda^i}(a^i, a^{*-i}) \leq v_c^{\Lambda^i}(a^*)$, $\forall a^i \in A^i$.

El conjunto de equilibrios conservadores del juego $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ para una representación aditiva ponderada de las preferencias o representación utilitarista se denota como $E_c^{ut}(G_\Lambda)$.

El siguiente resultado establece que la función de valor conservadora depende exclusivamente de los puntos extremos del poliedro de pesos. Para $i \in N$, sea Λ^i un poliedro con p^i puntos extremos $\{\bar{\lambda}^i(1), \ldots \bar{\lambda}^i(p^i)\}$.

Proposición 2.3.9. *Dado el poliedro de pesos $\Lambda^i \subset \Delta^{s^i}$, con puntos extremos $\bar{\lambda}^i(r), r = 1, ..., p^i$,*

$$v_c^{\Lambda^i}(a) = \min_{r=1,\ldots,p^i} v^i_{\bar{\lambda}(r)}(a),$$

Demostración. La demostración se sigue del hecho de que el mínimo de una función lineal en un poliedro se alcanza en alguno de sus puntos extremos. □

Como consecuencia de este resultado y de la definición de equilibrio, se puede establecer la siguiente proposición.

Proposición 2.3.10. *Dado el poliedro de pesos $\Lambda^i \subset \Delta^{s^i}$, con puntos extremos $\bar{\lambda}^i(r), r = 1, ..., p^i$, a^* es un equilibrio conservador de G_Λ si y sólo si cada a^{*i} es solución óptima del problema escalar:*

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & t \\ s.a. \quad & \bar{\lambda}^i(r)u^i(a^i, a^{*-i}) \geq t, r = 1, ..., p^i \\ & a^i \in A^i \end{aligned}$$

Demostración. En virtud de la Proposición 2.3.9, a^* es un equilibrio utilitarista conservador del juego G_Λ si y sólo si $\nexists i \in N$ con $a^i \in A^i$ tal que para todo r, $\bar{\lambda}^i(r)u^i(a^i, a^{*-i}) > \text{mín}_{r=1,...,p^i} \bar{\lambda}^i(r)u^i(a^*)$, $\forall i \in N$, es decir, en a^{*i} se alcanza el máximo de $\text{mín}_{r=1,...,p^i} \bar{\lambda}^i(r)u^i(a^i, a^{*-i})$, con lo que se tiene el resultado. □

Observación 2.3.11. La función de valor conservadora $v_c^{\Lambda^i}$ es continua si las funciones u_j^i lo son, aunque no es diferenciable en determinados subconjuntos del espacio de estrategias. Esto hace que la determinación de las funciones de mejor respuesta pueda basarse en técnicas de diferenciabilidad, y su dificultad depende de la forma de las funciones u_j^i. No obstante, si las funciones u_j^i son cóncavas, la función de valor conservadora también es cóncava, por lo que son aplicables los teoremas clásicos que aseguran la existencia de equilibrio. Luego, si las utilidades son cóncavas, siempre existen equilibrios utilitaristas conservadores.

Este enfoque conservador se puede considerar como un compromiso entre la representación utilitarista y la representación igualitarista que trataremos en la siguiente sección. Cuando hay un único vector de pesos $\lambda^i \in \Delta^{s^i}$, coincide con el equilibrio dado por la representación utilitarista de las preferencias con información completa. Sin embargo, si se consideran todos los pesos de Δ^{s^i}, coincide con la solución maximin, como se verá más adelante.

2.3.3. Equilibrios optimistas

Siguiendo un enfoque optimista y dado el juego con información sobre las preferencias, $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$, consideramos el caso en que la elección de una estrategia depende del mayor valor ponderado de las utilidades individuales. Bajo este enfoque, la función de valor es:

$$v_{op}^{\Lambda^i}(a) = \max_{\lambda^i\in\Lambda^i} \sum_{j=1}^{s^i} \lambda_j^i u_j^i(a)$$

donde λ^i son los pesos de importancia o ponderaciones de las utilidades para el agente i.

En esta ocasión, el agente tiene un punto de vista optimista ya que maximiza la máxima ganancia, es decir, lo mejor que puede conseguir entre los pesos aceptables.

Definición 2.3.12. Un perfil de estrategias a^* es un equilibrio utilitarista optimista para el juego $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ si $\nexists\, i \in N$ con $a^i \in A^i$ tal que $v_{op}^{\Lambda^i}(a^i, a^{*-i}) > v_{op}^{\Lambda^i}(a^*)$.

Equivalentemente, $\forall i \in N$, $v_{op}^{\Lambda^i}(a^i, a^{*-i}) \le v_{op}^{\Lambda^i}(a^*)$, $\forall a^i \in A^i$.

Se denota como $E_{op}^{ut}(G_\Lambda)$ al conjunto de equilibrios optimistas del juego $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ con una representación aditiva ponderada de las preferencias.

Al igual que para los equilibrios conservadores, la función de valor optimista depende sólo de los puntos extremos del conjunto de pesos.

Observación 2.3.13. La función de valor optimista es continua si lo son las funciones de utilidad y no es diferenciable en ciertos subconjuntos del espacio de estrategias. A diferencia del caso de la función conservadora, la función de valor optimista no es, en general, cóncava, por lo que no está garantizada la existencia de equilibrio.

2.3.4. Equilibrios neutrales

Sea el juego con información sobre las preferencias, $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ y para $i \in N$, sea Λ^i un poliedro con p^i puntos extremos $\{\bar{\lambda}^i(1), \ldots \bar{\lambda}^i(p^i)\}$. En ocasiones, la actitud de los agentes no es extrema, es decir, no es optimista ni pesimista. Si el agente manifiesta una actitud neutral, su valoración de las estrategias depende del valor medio de las utilidades individuales. Desde esta perspectiva, puede considerarse la función de valor:

$$v_n^{\Lambda^i}(a) = \sum_{r=1}^{p^i} \sum_{j=1}^{s^i} \frac{\bar{\lambda}^i(r)_j}{p^i} u_j^i(a).$$

De este modo, un equilibrio neutral se define de la siguiente forma.

Definición 2.3.14. Un perfil de estrategias a^* es un equilibrio utilitarista neutral del juego $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ si $\nexists\, i \in N$ con $a^i \in A^i$ tal que $v_n^{\Lambda^i}(a^i, a^{*-i}) > v_n^{\Lambda^i}(a^*)$.

De forma equivalente, $\forall i \in N$, $v_n^{\Lambda^i}(a^i, a^{*-i}) \leq v_n^{\Lambda^i}(a^*)$, $\forall a^i \in A^i$.

El conjunto de equilibrios neutrales del juego $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ para una representación aditiva de las preferencias se denota como $E_n^{ut}(G_\Lambda)$.

Observación 2.3.15. Si los agentes manifiestan una actitud neutral, el estudio de los equilibrios se reduce al estudio de los equilibrios de un juego escalar ponderado por los pesos centrales del poliedro de pesos. Si las funciones u_j^i son cóncavas, la función de valor neutral también lo es, y por tanto, son aplicables los teoremas clásicos de existencia de equilibrio. Es decir, para funciones de utilidad cóncavas, siempre existen equilibrios utilitaristas neutrales.

2.4. Representación maximin de las preferencias y equilibrios

Otra forma de representar las preferencias de los agentes es considerar una función de valor desde una perspectiva igualitarista. El igualitarismo es una corriente que, en opinión de Rawls (1971), supera al utilitarismo, ya que, mientras éste considera el bienestar de todos en suma, pudiendo afectar a los derechos individuales, el igualitarismo busca la igualdad, resarciendo a las posiciones peor situadas, y estableciendo así una tendencia a la búsqueda de una igualdad relativa.

Desde esta óptica, dado un perfil de estrategias $a \in \times_{i=1}^n A^i$, el agente i considera como valoración de sus preferencias el mínimo de cada utilidad ponderada con un determinado peso.

Formalmente, sea $\alpha^i = (\alpha_1^i, ..., \alpha_{s^i}^i)$ el vector de pesos de las utilidades para el agente i, $\alpha^i \in \Delta^{s^i} = \{\alpha^i \in \mathbb{R}^{s^i} : \sum_{j=1}^{s^i} \alpha_j^i = 1, \alpha_j^i \geq 0\}$. La valoración que hace el agente i del perfil de estrategias $a \in \times_{i=1}^n A^i$ viene dada por la expresión

$\text{mín}_{j\in J^i}\left\{\frac{u^i_j(a)}{\alpha^i_j}\right\}$. Obsérvese que si algún peso es nulo, $\alpha^i_j = 0$, el cociente correspondiente no está definido, y no se considera en el cálculo del mínimo.

Sea $\Delta = \times_{i=1}^n \Delta^{s^i}$. Para $\alpha \in \Delta$, $G_\alpha = \{(A^i, w^i_\alpha)_{i\in N}\}$ es el juego escalar correspondiente, donde

$$w^i_\alpha(a) = \min_{j\in J^i}\left\{\frac{u^i_j(a)}{\alpha^i_j}\right\}.$$

Fijado $\alpha \in \Delta$, un perfil $a^* \in A$ es un equilibrio de Nash para el juego G_α si $\nexists\, i \in N$ con $a^i \in A^i$ tal que $w^i_\alpha(a^i, a^{*-i}) > w^i_\alpha(a^*)$.

$E^m(G_\alpha)$ denota el conjunto de equilibrios de Nash del juego $G_\alpha = \{(A^i, w^i_\alpha)_{i\in N}\}$.

De modo análogo a como se hizo con la representación aditiva de las preferencias, estudiamos la interrelación de los equilibrios de Nash del juego G y las estrategias de equilibrio que se obtienen al considerar todos los pesos posibles en la representación maximin de las preferencias.

Para conseguir una caracterización de los equilibrios desde esta perspectiva, hay que tener en cuenta la equivalencia entre soluciones eficientes o débilmente eficientes y las soluciones de un problema maximin, realizada anteriormente en el Capítulo 1. En virtud de esta equivalencia, los siguientes resultados establecen la relación entre los equilibrios y los equilibrios débiles del juego G con los equilibrios maximin del juego G_α.

Proposición 2.4.1. *Sea $G = \{(A^i, u^i)_{i\in N}\}$ un juego con utilidades vectoriales. Entonces*

$$E(G) \subseteq \cup\{E^m(G_\alpha) : \alpha \in \Delta\} \subseteq E^d(G).$$

Demostración. Para probar la primera inclusión, sea a^* un equilibrio del juego G, entonces para todo $i \in N, a^{*i}$ es solución eficiente del problema $\text{máx}_{a^i\in A^i}\, u^i(a^i, a^{*-i})$. Por la Proposición 1.1.11, $\exists \alpha^i \in \Delta$, tal que $a^{*i} = argmax_{a^i\in A^i} u^i(a^i, a^{*-i})$, es decir, a^* es equilibrio del juego $G_\alpha = \{(A^i, w^i_\alpha)_{i\in N}\}$.

Para probar la segunda inclusión, sea a^* un equilibrio maximin del juego G_α, entonces para cada $i \in N$, a^{*i} maximiza $\text{mín}_{j\in J^i}\left\{\frac{u^i_j(a^i,a^{*-i})}{\alpha^i_j}\right\}$, con $\alpha \geq 0$, por lo que $\forall i \in N$, a^{*i} es una solución w-eficiente del problema $\text{máx}_{a^i\in A^i}\, u^i(a^i, a^{*-i})$, y, por tanto, constituye un equilibrio débil del juego G. □

Observación 2.4.2. En general, estas inclusiones pueden ser estrictas. Pueden existir óptimos del problema maximin ponderado con $\alpha \in \Delta$ que no sean soluciones eficientes (aunque sí débilmente eficientes). Bajo condiciones muy especiales, también pueden existir puntos débilmente eficientes que no se pueden obtener como soluciones de problemas maximin ponderados.

En virtud del resultado anterior, el conjunto de equilibrios de los juegos G_α, con $\alpha \in \Delta$, contiene a todos los equilibrios de Nash del juego G. Y en los casos en los que se obtienen otras estrategias que no son equilibrios de Nash, estos son equilibrios débiles.

Bajo ciertas hipótesis es posible caracterizar el conjunto de los equilibrios del juego G.

Teorema 2.4.3. *Sea $G = \{(A^i, u^i)_{i\in N}\}$ un juego tal que cada A^i es un conjunto convexo no vacío de un espacio euclídeo de dimensión finita y cada componente de u^i es estrictamente cóncava en a^i. Entonces*

$$E(G) = \cup\{E^m(G_\alpha) : \alpha \in \Delta\}.$$

Demostración. La demostración de este resultado se obtiene aplicando la Observación 1.1.12. □

Como conclusión, la consideración de la representación maximin de las preferencias para caracterizar los equilibrios de los juegos con utilidades vectoriales es un procedimiento menos restrictivo que el basado en las sumas ponderadas. De este modo, se pueden generar todos los equilibrios sin necesidad de imponer condiciones de convexidad.

En la Figura 2.1 se muestran las relaciones existentes entre los equilibrios y equilibrios débiles de G y los equilibrios de los juegos con una representación aditiva y maximin de las preferencias.

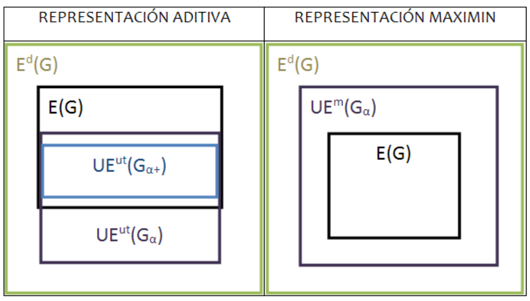


Figura 2.1. Representación de las preferencias y equilibrios.

Nótese que, cuando cada A^i es un conjunto convexo no vacío de un espacio euclídeo de dimensión finita y cada componente de u^i es estrictamente cóncava en a^i, todos los conjuntos de equilibrios coinciden.

2.4.1. Equilibrios con información parcial

Analizamos a continuación las consecuencias de añadir cierta información sobre las preferencias de los agentes en la determinación de diferentes subconjuntos de equilibrios de Nash del juego con utilidades multidimensionales.

Considerando que cada agente valora sus preferencias mediante una representación maximin y disponiendo de cierta información parcial sobre las preferencias de cada agente, sea $\Lambda^i \subseteq \Delta^{s^i}$ el subconjunto de pesos que representa la información parcial del agente i y sea $\Lambda = \times_{i \in N} \Lambda^i$. El juego con la información parcial se denota por $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i \in N}\}$.

Definición 2.4.4. Un perfil de estrategias a^* es un equilibrio maximin para el juego con información parcial $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i \in N}\}$ si a^* es un equilibrio del juego $G_\alpha = \{(A^i, w^i_\alpha)_{i \in N}\}$ para algún $\alpha \in \Lambda$.

$E^m(G_\Lambda)$ es el conjunto de equilibrios de Nash del juego con información sobre las preferencias $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i \in N}\}$. Es decir, $E^m(G_\Lambda) = \cup\{E^m(G_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$.

2.4.2. Equilibrios conservadores

Sea el juego $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i \in N}\}$, con información sobre las preferencias de los agentes. Considerando la representación maximin ponderada de las preferencias para el juego G, si los agentes muestran una actitud conservadora, eligen sus estrategias por medio de la función de valor:

$$w_c^{\Lambda^i}(a) = \min_{\alpha^i \in \Lambda^i} \min_{j \in J^i} \left\{ \frac{u^i_j(a)}{\alpha^i_j} \right\}$$

con α^i el vector de pesos de las utilidades para el agente i.

Definición 2.4.5. Un perfil de estrategias a^* es un equilibrio maximin conservador del juego G_Λ si $\nexists\, i \in N$ con $a^i \in A^i$ tal que $w_c^{\Lambda^i}(a^i, a^{-i}) > w_c^{\Lambda^i}(a^*)$.

Se denota $E_c^m(G_\Lambda)$ al conjunto de los equilibrios conservadores del juego $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ para una representación maximin de las preferencias.

La siguiente proposición demuestra que, cuando la información parcial se representa mediante restricciones lineales sobre los pesos, los equilibrios maximin conservadores coinciden con los que se obtienen cuando las componentes del vector de pesos son el máximo valor que puede alcanzar por componentes, normalizado para sumar la unidad. Por tanto, coinciden con un equilibrio maximin con una ponderación fija. Para $i \in N$, sea Λ^i un poliedro con p^i puntos extremos $\{\bar{\alpha}^i(1), \ldots \bar{\alpha}^i(p^i)\}$.

Lema 2.4.6. *Dado el poliedro de pesos $\Lambda^i \subset \Delta^{s^i}$, con puntos extremos $\bar{\alpha}^i(r), r = 1, ..., p^i$. La función de valor conservadora es*

$$w_c^{\Lambda^i}(a) = \min_{j\in J^i} \left\{ \frac{u_j^i(a)}{\beta_j^i} \right\}$$

donde $\beta_j^i = \max_{\alpha^i\in\Lambda^i} \alpha_j^i = \max_{r=1,\ldots,p^i}\{\bar{\alpha}^i(r)_j\}$, para cada $i \in N$.

Demostración. $w_c^{\Lambda^i}(a) = \min_{\alpha^i\in\Lambda^i} \min_{j\in J^i} \left\{ \frac{u_j^i(a)}{\alpha_j^i} \right\} = \min_{j\in J^i} \min_{\alpha^i\in\Lambda^i} \left\{ \frac{u_j^i(a)}{\alpha_j^i} \right\}$. Sea $\beta_j^i = \max_{r=1,\ldots,p^i}\{\bar{\alpha}^i(r)_j\}$, entonces $\min_{\alpha^i\in\Lambda^i} \left\{ \frac{u_j^i(a)}{\alpha_j^i} \right\} = \frac{u_j^i(a)}{\beta_j^i}$ y se verifica que $w_c^{\Lambda^i}(a) = \min_{j\in J^i} \left\{ \frac{u_j^i(a)}{\beta_j^i} \right\}$. □

Este resultado permite establecer una caracterización de los equilibrios conservadores de un juego con información parcial sobre las preferencias con representación maximin.

Teorema 2.4.7. *Un perfil de estrategias a^* es un equilibrio maximin conservador del juego $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ si es un equilibrio del juego $\{(A^i, w_{\bar{\beta}}^i)_{i\in N}\}$, $a^* \in E^m(G_{\bar{\beta}})$, donde para cada $i \in N$, $\bar{\beta}_j^i = \frac{\beta_j^i}{\sum_{j\in J^i}\beta_j^i}$ y $\beta_j^i = \max_{r=1,\ldots,p^i}\{\bar{\alpha}^i(r)_j\}$.*

Demostración. Se sigue del hecho de que el argumento del máximo, *argmax*, no cambia al normalizar los vectores de pesos. □

2.4.3. Equilibrios optimistas

Dado el juego con información adicional sobre las preferencias de los agentes $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$, un agente optimista valora el resultado más favorable de entre los posibles. Desde una óptica optimista de la representación maximin ponderada del juego G, consideramos la función de valor:

$$w_{op}^{\Lambda^i}(a) = \max_{\alpha^i \in \Lambda^i} \min_{j \in J^i} \left\{ \frac{u_j^i(a)}{\alpha_j^i} \right\}$$

donde α^i es el vector de pesos de importancia de las utilidades para el agente i.

$E_{op}^m(G_\Lambda)$ es el conjunto de los equilibrios optimistas del juego $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i \in N}\}$ para una representación maximin de las preferencias.

Definición 2.4.8. Un perfil de estrategias a^* es un equilibrio maximin optimista del juego G_Λ si $\nexists\, i \in N$ con $a^i \in A^i$ tal que $w_{op}^{\Lambda^i}(a^i, a^{*-i}) > w_{op}^{\Lambda^i}(a^*)$.

El conjunto de equilibrios de Nash del juego con una regla optimista de la representación maximin ponderada de las preferencias se denota $E_{op}^m(G_\Lambda)$.

2.4.4. Equilibrios neutrales

Sea $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i \in N}\}$ el juego con información sobre las preferencias, y para $i \in N$, sea Λ^i un poliedro con p^i puntos extremos $\{\bar{\alpha}^i(1), \ldots \bar{\alpha}^i(p^i)\}$. Si los agentes muestran una actitud neutral, valoran sus estrategias mediante la expresión:

$$w_n^{\Lambda^i}(a) = \min_{j \in J^i} \left\{ \frac{u_j^i(a)}{\sum_{r=1}^{p^i} \frac{\bar{\alpha}^i(r)_j}{p^i}} \right\}$$

considerando los pesos correspondientes a un punto central, el centroide del poliedro Λ^i. De este modo, un equilibrio neutral se define como sigue.

Definición 2.4.9. Un perfil de estrategias a^* es un equilibrio maximin neutral del juego G_Λ si $\nexists\, i \in N$ con $a^i \in A^i$ tal que $w_n^{\Lambda^i}(a^i, a^{*-i}) > w_n^{\Lambda^i}(a^*)$.

$E_n^m(G_\Lambda)$ denota el conjunto de equilibrios neutrales del juego $G_\Lambda = \{(A^i, u^i, \Lambda^i)_{i \in N}\}$ con una representación maximin ponderada de las preferencias.

Capítulo 3

Modelos estratégicos con preferencias sociales

3.1. Introducción

El enfoque tradicional de los modelos económicos considera que todos los agentes buscan exclusivamente su propio beneficio. Sin embargo, existen experimentos de negociación y cooperación que muestran que los agentes no se guían sólo por el propio interés (Dreber et al., 2014). Biólogos y psicólogos abundan en esta idea (Nowack, 2006; Tabibnia et al., 2008), señalando en sus estudios que las personas, de forma habitual, suelen preocuparse por el bienestar de los demás.

Aunque en la economía experimental se han estudiado ampliamente las implicaciones de contemplar el interés por los demás (Cárdenas, 2000; Casari y Plott, 2003), en los modelos teóricos tradicionales la incorporación de este tipo de comportamiento aún es escasa. Este capítulo se centra en el estudio de dos modelos económicos clásicos, desde una perspectiva no tradicional.

En primer lugar, analizamos el modelo de utilización de los bienes comunales, teniendo en cuenta diferentes actitudes sociales en los agentes, y en segundo lugar, el modelo del oligopolio de Cournot, en el que las empresas incorporan responsabilidad social para evaluar sus resultados. Para incorporar otras consideraciones distintas a la utilidad de cada agente que involucran objetivos sociales, nos valemos de la modelización de las preferencias de los agentes mediante funciones de utilidad multidimensionales.

Aunque Gordon (1954) y Scott (1955) ya advertían del problema de conservación de los bienes comunales, es Hardin (1968) quien vuelve a tratar el tema y genera un debate académico que continúa hasta la actualidad. Hardin muestra su preocupación por la conservación de los recursos y el problema de la superpoblación, cuyo origen se debe, según el autor, a la existencia de recursos comunes y la libertad para procrear. Es lo que denomina *tragedia de los comunes*. Con este término hace referencia a la eficiencia de un recurso común utilizado por varios agentes simultáneamente, de modo que todos tienen derecho de uso pero no tienen derecho de exclusión. La tragedia es el resultado ineficiente de la sobreexplotación y del libre acceso a los recursos, lo que conlleva su agotamiento. Lo que es verdaderamente trágico de esta situación es que este comportamiento egoísta en realidad no beneficia a ningún agente de forma individual. Por otra parte, si los usuarios colaboraran podrían establecer un sistema que beneficiaría a todos, al mismo tiempo que se protegería el recurso a largo plazo. Hardin no creía que tal sistema auto-organizado y auto-gobernado fuese alcanzable. Sostuvo que las únicas maneras de evitar la tragedia de los comunes eran mediante el establecimiento de la propiedad privada o con regulaciones gubernamentales.

Otros autores, sin embargo, muestran su desacuerdo, utilizando para ello múltiples ejemplos que plantean lo contrario a estas predicciones. Ostrom (1990) sugiere que hay otra manera de avanzar. No sólo demostró que los usuarios de los bienes comunales pueden trabajar juntos para revertir la degradación ambiental y gobernar de forma sostenible los bienes comunales, sino que además proporcionó un marco potencial para hacerlo. Una de sus contribuciones más importantes fue la identificación de ocho principios comunes que compartían todos los casos exitosos de autogobierno de bienes comunales. Desde entonces, la validez de estos principios ha sido objeto de un intenso análisis, tanto desde una perspectiva teórica como empírica (Walker et al., 2000; Ostrom, 2009; Cox et al., 2010). En Faysse (2005) y en Diekert (2012) se presenta una revisión de los trabajos en este campo dentro de la teoría de juegos.

La introducción del carácter social de los agentes permite un enfoque distinto para tratar estos problemas. Weber et al.(2004) presentan una revisión de la literatura experimental sobre los factores que influyen en el comportamiento de los agentes en los dilemas sociales. Las dos actitudes en el lado opuesto al individualismo son cooperación y altruismo. La cooperación es la motivación para maximizar resultados conjuntos. Algunos autores (Nowak y Sigmund, 1998; Lotem et al., 1999; Wedekind y Milinski, 2000; Milinski et al., 2001) han probado que la cooperación en el problema de los bienes comunales surge cuando los agentes que participan tienen una actitud colaboradora. Milinski et al. (2002) muestran que la tragedia de los comunes puede evitarse con este tipo de cooperación.

Mientras que la aparición de la cooperación se puede justificar mediante el hecho de que cada agente se beneficia de tal comportamiento, la justificación del altruismo no es tan directa. El término altruismo fue creado en 1851 por el filósofo francés Auguste Comte para designar una actitud solidaria opuesta al egoísmo. Se diferencia de la cooperación en que el altruismo no conlleva beneficios directos ni reciprocidad de otros agentes. En la literatura existente encontramos algunas contribuciones sobre la incorporación del comportamiento altruista de los agentes en el problema de los bienes comunales. Aunque resolver este problema puede requerir incentivos lucrativos, algunos agentes pueden actuar de forma que, altruísticamente, consideren el bien colectivo por encima del propio interés (Schwartz, 1977). Así, Edney (1980) sugiere que la cuestión de los bienes comunales no es un tema de elección racional egoísta, sino un conflicto de valores humanos. Según Barclay (2004), la tragedia de los comunes puede evitarse si los agentes actúan voluntariamente en interés de los otros agentes que conforman la comunidad.

Afanador (2009) demuestra que el componente altruista de las preferencias de los agentes determina el ritmo de utilización del recurso. Además analiza el nivel de altruismo necesario para garantizar la sostenibilidad del sistema. Montanier y Bredeche (2011) han estudiado de forma experimental cómo surge el comportamiento altruista de los agentes cuando se enfrentan a situaciones en las que dicho comportamiento es obligatorio para sobrevivir.

En 1998, Heller indicó que la privatización de un bien común puede evitar la sobreutilización de un recurso, pero puede provocar inadvertidamente lo contrario. Para describir esta situación, utilizó el término *tragedia de los anticomunes*. Con este término, se refiere al caso en el que varios agentes tienen derecho de exclusión sobre un recurso común, pero ninguno tiene derecho exclusivo de uso. Con ello, cubre cualquier escenario en el que muchos agentes pueden evitar que otros creen o utilicen un recurso. Correctamente entendida, lo opuesto a la sobreutilización de un bien comunal es la infrautilización en un anticomún. Algunos autores han estudiado la relación entre la tragedia de los comunes y la de los anticomunes, como Buchanan y Yoon (2000), Hsu (2003), Fennell (2004), Munzer (2005), Bertacchini et al.(2008).

Para estudiar el problema de los bienes comunales en este capítulo presentamos un modelo alternativo en el que se incorporan al modelo tradicional las preferencias que muestran los agentes con respecto a su propio beneficio y el bienestar social. Con el fin de analizar esta situación, consideramos un juego n-personal con funciones de utilidad vectoriales. A partir de diferentes actitudes de los agentes con respecto al beneficio de los demás, concluimos que la tragedia de los comunes no es, necesariamente, el resultado del juego.

Con respecto al modelo de Cournot (1838), según la perspectiva de la economía ortodoxa, las empresas deben maximizar beneficios dentro de las leyes y normas de la sociedad, por lo que dichas empresas no son propensas a actuar altruísticamente. En un modelo de oligopolio cada una de las empresas supone que sus resultados dependen fuertemente de las decisiones que tome el resto de empresas, es decir, hay interdependencia estratégica entre ellas. Las diversas hipótesis que cada empresa realice sobre la reacción de la empresa competidora pueden generar distintos equilibrios en el mercado. En estos casos no se considera la opción de que las empresas puedan llegar a acuerdos entre ellas, y, por tanto, se trata de oligopolios no cooperativos, entre los que ocupa un lugar predominante el modelo de oligopolio de Cournot.

Un punto de vista más optimista es el que considera que las empresas se preocupan por los demás, en este caso, por los consumidores, manifestando una responsabilidad social. Así, podría considerarse la responsabilidad social de las empresas como una característica similar al altruismo individual de un agente, si bien en la actualidad los consumidores han añadido presión a las empresas para que éstas aumenten su aportación al cuidado del contexto social. No obstante, hay que distinguir entre actividades socialmente deseables que son rentables para la empresa y las que no lo son (Karnani, 2011). La mayoría de la literatura actual sobre responsabilidad social enfatiza sus relaciones positivas con la rentabilidad (Vogel, 2005; Porter y Kramer, 2006). Por ello, animan a las empresas a ser socialmente responsables en este sentido y asumen, al menos implícitamente, que todo comportamiento socialmente responsable es perfectamente consistente con el interés de la empresa.

Una forma de analizar los efectos de la estrategia de responsabilidad social es introducir en la función de utilidad de la empresa social el exceso de coste que depende del nivel de responsabilidad social de la empresa (Ni et al., 2010; Manasakis et al., 2013). Un punto de vista diferente considera que los esfuerzos de responsabilidad social no inducen costes adicionales a las empresas. En este contexto, como un medio para incorporar la meta social al modelo estratégico, se introduce un porcentaje del excedente del consumidor en la función de utilidad de la empresa social (Goering, 2007; Lambertini y Tampieri, 2010; Kopel y Brand, 2012).

El modelo que analizamos en este capítulo se encuadra en este contexto. Consideramos un duopolio mixto en el que la empresa social internaliza su propio porcentaje de externalidad y es sensible al excedente del consumidor. Más específicamente, analizamos situaciones en las que una empresa maximizadora de beneficios compite con una empresa socialmente responsable en un duopolio sobre un bien homogéneo, o bien ambas empresas son socialmente responsables. En contraste con la empresa maximizadora de beneficios, la empresa socialmente responsable tiene en cuenta no sólo su propio beneficio, sino también un porcentaje del excedente del consumidor. Una diferencia importante con los trabajos anteriormente mencionados estriba en que, en nuestro modelo, la utilidad de la empresa social viene dada por una función biobjetivo.

En el análisis desarrollado en este capítulo para ambos modelos, procedemos de modo análogo. En primer lugar, presentamos el enfoque clásico del problema, identificando todos los elementos que intervienen en el juego escalar y a continuación, analizamos el problema con un enfoque distinto, mediante un juego vectorial en el que los agentes no sólo buscan su propio beneficio económico, sino que también tienen en cuenta otros objetivos. De esta forma, se busca un equilibrio entre las dimensiones económica y social, entendida esta última de distintas formas: ya sea, considerando los beneficios de las restantes empresas en el modelo de los bienes comunales, o bien, incorporando el excedente del consumidor en el modelo de oligopolio de Cournot. Esto supone un nuevo marco metodológico, distinto del planteamiento que hace la microeconomía tradicional.

3.2. El modelo clásico de los bienes comunales

En esta sección, establecemos el problema clásico de los bienes comunales como un juego. Los elementos que definen el juego son los siguientes:

- N es el conjunto de n personas (agentes del juego) que tiene acceso a un recurso común finito, $N = \{1, ..., n\}$.
- Para $i \in N$, m^i es el número de unidades del agente i que hace uso del bien comunal, $m = (m^1, ..., m^n)$.
- M es el número total de unidades, $M = m^1 + ... + m^n = \sum_{i=1}^{n} m^i$.
- $V(M)$ es el beneficio que obtiene cada agente por cada una de las unidades que hace uso del bien comunal, cuando se utilizan M unidades en total; hay un valor máximo M_{max} de unidades que pueden usar el bien, a partir del cual $V(M)$ es igual a cero. La función V es estrictamente decreciente, dos veces diferenciable, tal que $\frac{\partial^2 V}{\partial m^i}(M) < 0, i \in N$.

- Para $i \in N$, $A^i \subseteq \mathbb{R}_+$ es el conjunto de estrategias del agente i que, en este caso, se refieren a cantidades. Como la cantidad total de unidades que pueden usar los agentes está acotada por M_{max}, el conjunto de estrategias es $A^i = [0, M_{max}]$. Se realiza el estudio para variables reales, ignorando el carácter, a veces discreto, de las mismas, al igual que se hace en la literatura clásica sobre el tema.

- Para $i \in N$, $u_i : \times_{i=1}^n A^i \to \mathbb{R}$, con $u_i(m) = m^i V(M)$ es la función de utilidad individual del agente i.

Así, $G = \{(A^i, u)_{i \in N}\}$ representa el juego de los bienes comunales.

El planteamiento tradicional de los bienes comunales se atiene al principio de racionalidad individual, es decir, cada agente se preocupa de su propio beneficio. En este contexto, los equilibrios de Nash se corresponden con aquellos $m^* = (m^{*1}, ..., m^{*n})$ donde cada agente maximiza su utilidad dadas las acciones de los demás agentes, $m^{*-i} = (m^{*1}, \ldots, m^{*i-1}, m^{*i+1}, \ldots, m^{*n})$, es decir, el problema de cada agente es maximizar $u_i(m^i, m^{*-i})$ en su conjunto de estrategias A^i.

Dada la acción de $(n-1)$ agentes, se denota por $r^i(m^{-i})$, la función de mejor respuesta o función de reacción del agente i ante la acción de los demás. Dadas las hipótesis iniciales sobre la función $V(M)$, las funciones de reacción, r^i, son no crecientes, estrictamente decrecientes en un intervalo acotado y continuamente diferenciables, lo que garantiza la existencia de un único equilibrio que viene dado por el punto de corte de las funciones de reacción. El punto de equilibrio es $m^* = (\frac{M^*}{n}, ..., \frac{M^*}{n})$, donde $M^* = argmax_{m^i \in A^i} u_i(m^i, m^{*-i})$.

Ejemplo 3.2.1. Un conjunto de n ganaderos tiene derecho de uso de un pastizal para alimentar a sus ovejas, siendo $V(M) = a - M^2$ el beneficio que obtienen de cada oveja si hay M ovejas en el terreno. Por tanto,

$$u_j(m) = m^j (a - (\sum_{i=1}^{n} m^i)^2).$$

El equilibrio de Nash de este juego se alcanza llevando cada agente al terreno a pastar el mismo número de ovejas, $m^{*i} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{an}{n+2}}$, de modo que el número total de ovejas que se llevan a pastar es $M^* = \sqrt{\frac{an}{n+2}}$, siendo la utilidad individual del ganadero i, $u_i(m) = \sqrt{\frac{a}{n(n+2)}}(a - (n\sqrt{\frac{a}{n(n+2)}})^2) = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{a^3 n}{(n+2)^3}}$. De este modo, la utilidad total es $n\frac{2}{n}\sqrt{\frac{a^3 n}{(n+2)^3}} = 2\sqrt{\frac{a^3 n}{(n+2)^3}}$.

Toda esta información queda recogida en la Tabla 3.1, en la que se muestran los resultados obtenidos si el pastizal fuese un bien privado ($n = 1$), y un bien comunal, incluyendo el caso de dos ganaderos y cuando la cantidad de ganaderos tiende a ∞. Puede observarse que, en este último caso, cuando el número de ganaderos tiende a ∞ el número de ovejas que cada ganadero lleva a pastar al terreno tiende a cero, $m^{*i} = 0$, y la utilidad total tiende a ser nula.

Nº de ganaderos	$n = 1$	$n = 2$	n	$n = \infty$
Nº ovejas individual	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}$	$\frac{1}{n}\sqrt{\frac{an}{n+2}}$	0
Nº ovejas total	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\sqrt{\frac{a}{2}}$	$\sqrt{\frac{an}{n+2}}$	$\sqrt{a}$
Ganancia individual	$2\sqrt{\frac{a^3}{3^3}}$	$\sqrt{\frac{2a^3}{4^3}}$	$\frac{2}{n}\sqrt{\frac{a^3 n}{(n+2)^3}}$	0
Ganancia total	$2\sqrt{\frac{a^3}{3^3}}$	$2\sqrt{\frac{2a^3}{4^3}}$	$2\sqrt{\frac{a^3 n}{(n+2)^3}}$	0

Tabla 3.1. Equilibrios para bienes comunales: comportamiento racional.

En la Figura 3.1 se representan las curvas de reacción y el equilibrio para dos ganaderos.

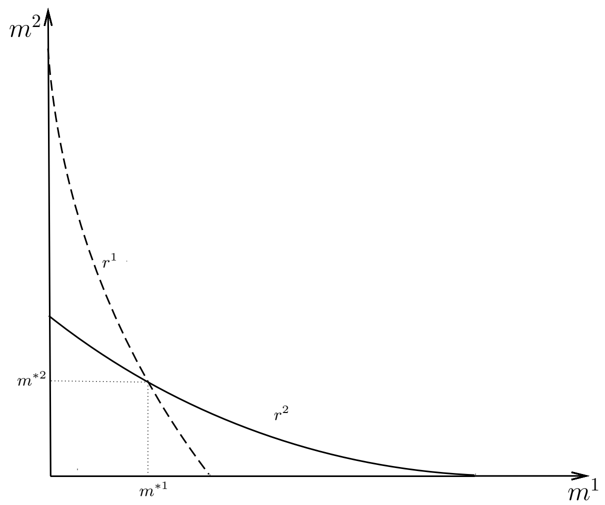


Figura 3.1. Curvas de reacción de los agentes y punto de equilibrio.

3.3. El modelo de los bienes comunales con preferencias sociales

A continuación, consideramos el juego de los bienes comunales cuando los agentes muestran una preocupación por el bienestar de los demás. En este contexto, cada uno de los agentes no sólo tiene en cuenta su beneficio individual, sino que también considera los beneficios de los demás agentes implicados.

Para analizar esta situación, consideramos un juego n-personal en el que inicialmente todos los agentes consideran la misma función de utilidad vectorial $u : \times_{i=1}^{n} A^i \to \mathbb{R}^n$, con $u := (u_i(m))_{i \in N}$, donde $u_i(m) = m^i V(M)$, para $i \in N$.

Este juego se denota por $G = \{(A^i, u)_{i \in N}\}$.

Se define formalmente un equilibrio de Nash para este juego del siguiente modo.

Definición 3.3.1. El perfil de estrategias (m^{*i}, m^{*-i}) es un equilibrio de Nash para el juego $G = \{(A^i, u)_{i \in N}\}$ si $\nexists\, i \in N$ con $m^i \in A^i$ tal que $u(m^i, m^{*-i}) \geq u(m^*)$, $\forall i$.

Para $i \in N$, denotamos por R^i la correspondencia que representa la mejor respuesta del agente i a las acciones de los demás agentes. En el caso de utilidades vectoriales, la mejor respuesta de un agente a las acciones de los restantes agentes no es en general única, sino que es un subconjunto de su conjunto de estrategias, $R^i(m^{-i}) \subseteq A^i$, formado por aquellas estrategias del agente i que no mejoran su utilidad vectorial por desviación desde ellas. Así, un perfil de estrategias (m^{*i}, m^{*-i}) es un equilibrio de Nash para el juego $G = \{(A^i, u)_{i \in N}\}$ si y sólo si $m^{*i} \in R^i(m^{*-i})$ para $i \in N$. El conjunto de los equilibrios de Nash para $G = \{(A^i, u)_{i \in N}\}$ se denota $E(G)$. Para determinar este conjunto establecemos la función de reacción del agente i teniendo en cuenta cada función componente u_j, de su función de utilidad vectorial u, $r^i_j(m^{-i}), i, j \in N$.

El siguiente resultado caracteriza los equilibrios de Nash para el juego vectorial.

Proposición 3.3.2. *El conjunto de los equilibrios de Nash del juego* $G = \{(A^i, u)_{i \in N}\}$ *es*

$$E(G) = \{(m^1, ..., m^n) : 0 \leq m^i \leq r^i(m^{-i}), i \in N\}.$$

Demostración. Se deduce de la Proposición 2.2.4, sabiendo que la componente i-ésima de u, $u_i(m^1, ..., m^n) = m^i V(M)$, proporciona la misma función de reacción que la correspondiente al juego escalar con función de pagos $m^i V(M)$, $r^i_i(m^{-i}) = r^i(m^{-i})$.

Cuando el agente i considera la j-ésima componente de u, $j \neq i$, $u_j(m^1, ..., m^n) = m^j V(M)$, como $V(M)$ es decreciente, el máximo de $u_j(m^i, m^{-i})$ con respecto a m^i se alcanza para $m^i = 0$, es decir, $r^i_j(m^{-i}) = 0, \forall j \neq i$. Además, debido a la concavidad de cada u_j con respecto a la acción del agente i, el conjunto de reacción para el agente i viene dado por $R^i(m^{-i}) = \{m^i : 0 \leq m^i \leq r^i(m^{-i})\}$, por lo que se tiene el resultado. $\square$

Ejemplo 3.3.3. Si en el ejemplo 3.2.1, cada ganadero considera tanto su función de utilidad como la de los demás, se obtiene un juego n-personal en el que la función de utilidad vectorial de cada agente es

$$u(m) = (u_i(m))_{i \in N}, \quad u_i(m) = m^i(a - (\sum_{j=1}^{n} m^i)^2), i \in N.$$

Para el caso de dos ganaderos, tenemos

$$u(m) = (u_1(m), u_2(m)) = (m^1(a - (m^1 + m^2)^2, m^2(a - (m^1 + m^2)^2).$$

Las correspondientes funciones de mejor respuesta del agente i a las acciones del agente j con respecto a las componentes de sus funciones de utilidad son

$$r^i_1(m^j) = \frac{-2m^j + \sqrt{(m^j)^2 + 3a}}{3}, \; r^i_2(m^j) = 0, \;\; i, j = 1, 2, i \neq j.$$

Y el conjunto de equilibrios es

$$E(G) = \left\{ (m^1, m^2) \in \mathbb{R}^2_+ : m^1 \leq \tfrac{-2m^2 + \sqrt{(m^2)^2 + 3a}}{3}, \; m^2 \leq \tfrac{-2m^1 + \sqrt{(m^1)^2 + 3a}}{3} \right\}.$$

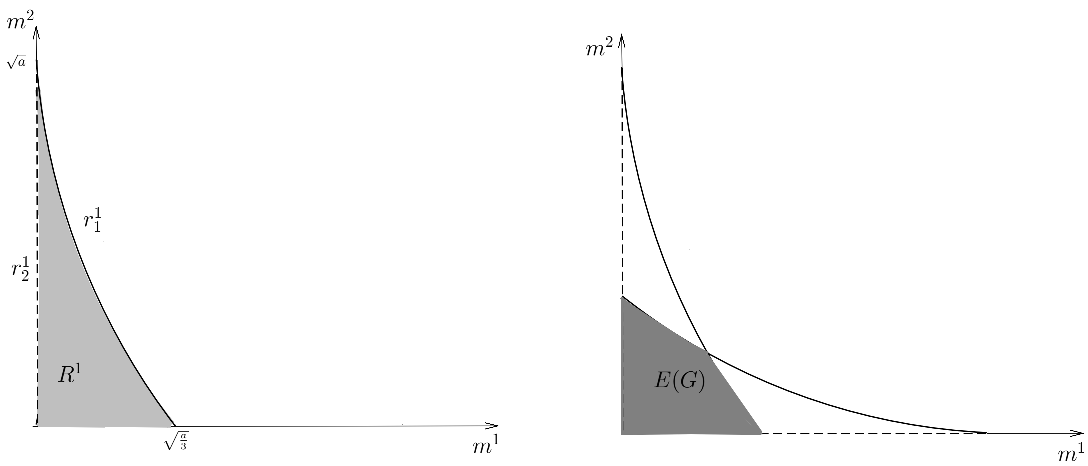


Figura 3.2. Curvas de reacción de un agente y conjunto de equilibrios.

En la Figura 3.2 se representan las curvas de reacción de un agente y el conjunto de equilibrios $E(G)$ del juego bipersonal bicriterio.

El conjunto de los equilibrios de Nash para el juego G es un conjunto muy amplio. Para obtener un refinamiento de dicho conjunto, se puede incorporar en el estudio de los equilibrios la actitud de cada agente con respecto a los beneficios de los demás.

En la situación inicial, suponemos que las preferencias de los agentes sobre el espacio de estrategias conjuntas $A := \times_{i \in N} A^i$ son incompletas. Para cada $i \in N$, denotamos por $\succsim^i$ la relación binaria que representa las preferencias del agente i, y por $\backsim^i$ y $\succ^i$ las correspondientes relaciones de indiferencia y preferencia estricta. En este contexto, las preferencias incompletas de los agentes están representadas por una función de utilidad vectorial en el sentido siguiente:

a) Si $u(a) \geqq u(b)$, entonces $a \succsim^i b$.

b) Si $u(a) = u(b)$, entonces $a \backsim^i b$.

c) Si $u(a) > u(b)$, entonces $a \succ^i b$.

Al introducir distintas actitudes de los agentes sobre los beneficios de los otros agentes es posible refinar las correspondientes preferencias. Establecemos, a continuación, diferentes actitudes de los agentes con respecto a las utilidades de los demás. Sea Π_N el conjunto de todas las posibles permutaciones del conjunto de agentes N. Para una permutación $\pi \in \Pi_N$, con $x \in \mathbb{R}^n$, denotamos $x_\pi \equiv (x_{\pi(i)})_{i \in N}$. Y sea $\pi(-i)$ una permutación del conjunto de agentes $N \setminus i$.

Definición 3.3.4. Sea $x \in \mathbb{R}^n$, donde x_j representa la utilidad individual del agente j. Sea $\succsim^i$ la relación binaria que representa las preferencias del agente i. El agente i es

a) *ecuánime* si para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $\pi \in \Pi_N$, $x \sim^i x_\pi$.

b) *imparcial* si para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $(x_i, x_{-i}) \backsim^i (x_i, x_{\pi(-i)})$.

c) *altruista* si existen $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ con $x_i < \bar{x}_i$, tales que $x \succ^i \bar{x}$.

d) *egoísta* si para cada $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, con $x_i < \bar{x}_i$, $x \not\succ^i \bar{x}$.

La propiedad de ecuanimidad es un propiedad de simetría, que establece que no importa el nombre de los agentes, se trata a todos ellos de igual modo. La imparcialidad significa que cada agente considera igual de importantes los beneficios de todos los demás. El altruismo y el egoísmo son conceptos opuestos, definiendo el altruismo como la posibilidad de que un agente elija una estrategia, anteponiendo en ocasiones el beneficio de los demás al suyo propio.

3.3.1. Equilibrios utilitaristas

El enfoque utilitarista considera una representación aditiva de las preferencias del agente. Por tanto, la función de valor de cada agente es $v_\lambda^i(m) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^i u_j(m)$, donde $\lambda^i \in \Delta^n = \{\lambda^i \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^n \lambda_j^i = 1, \lambda_j^i \geq 0\}$.

En el siguiente resultado se establece la relación entre la actitud social de los agentes y los parámetros correspondientes a la representación aditiva de las preferencias.

Lema 3.3.5. *Si las preferencias del agente $i \in N$ se representan mediante una función de valor aditiva, entonces el agente i es*

a) ecuánime si y sólo si $\lambda_j^i = \lambda_k^i$ para todo $j, k \in N$.

b) imparcial si y sólo si $\lambda_j^i = \lambda_k^i$ para todo $j, k \neq i$.

c) altruista si y sólo si $\lambda_j^i > 0$ para algún $j \neq i$.

d) egoísta si y sólo si $\lambda_j^i = 0$ para todo $j \neq i$.

Demostración. a) Si el agente i es ecuánime, entonces para todo x, $v_\lambda^i(x) = v_\lambda^i(x_\pi)$. Así, para $\bar{x}$ tal que $\bar{x}_k = 1$ para $k = j$ y $\bar{x}_k = 0$ para $k \neq j$, $v_\lambda^i(\bar{x}) = \lambda_j^i$ y para todo k, existe una permutación tal que $v_\lambda^i(\bar{x}_\pi) = \lambda_k^i$. Por tanto, $\lambda_j^i = \lambda_k^i$.

Del mismo modo se puede demostrar la implicación recíproca.

b) La demostración es análoga a la del apartado a) en $N \setminus i$.

c) $\Rightarrow$) Supongamos lo contrario de lo que queremos demostrar, es decir, que $\lambda_j^i = 0$ para todo $j \neq i$, así $\lambda_i^i = 1$ entonces $v_\lambda^i(x) = \lambda_i^i x_i < \lambda_i^i \bar{x}_i = v_\lambda^i(\bar{x})$, y esto contradice $x \succ^i \bar{x}$.

$\Leftarrow$) $\lambda_j^i > 0$ para algún $j \neq i$.

Si $\lambda_i^i = 0$, entonces tomemos x tal que $x_k = 0$ para $k \neq j$, y $x_j = 2$; y $\bar{x}$ tal que $\bar{x}_k = 1$ para $k = i$ y para $k = j$ y $\bar{x}_k = 0$ para $k \neq i, j$. Entonces, $v_\lambda^i(\bar{x}) < v_\lambda^i(x)$.

Si $\lambda_i^i > 0$, entonces sean x tal que $x_k = 0$ para $k \neq j$, y $x_j = a$, con $a > \frac{\lambda_i^i + \lambda_j^i}{\lambda_j^i}$; y $\bar{x}$ tal que $\bar{x}_k = 1$ para $k = i$ y para $k = j$ y $\bar{x}_k = 0$ para $k \neq i, j$. Luego, $v_\lambda^i(\bar{x}) < v_\lambda^i(x)$.

d) Un agente es egoísta si no es altruista, por tanto, usando c), es egoísta si y sólo si $\lambda^i_j = 0$ para todo $j \neq i$. □

3.3.1.1. Agentes imparciales y altruistas

Dependiendo de la situación, no todos los equilibrios son factibles de ser adoptados por los agentes. Es por ello que vamos a investigar cuáles son los equilibrios que se alcanzan cuando los agentes eligen sus mejores respuestas de acuerdo a diferentes actitudes sociales. Si el agente i es imparcial y altruista, $\lambda^i_j = \lambda^i_k$ para $j, k \neq i$, y además, $\lambda^i_k > 0$ para algún $k \neq i$, por lo que $\lambda^i_j = \lambda^i_k > 0$ para $j, k \neq i$. Por tanto, podemos expresar la función de valor del agente i como

$$v^i_\lambda(m) = \lambda^i_i u_i(m) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \bar{\lambda}^i u_j(m)$$

donde $\bar{\lambda}^i = \lambda^i_j > 0$ para todo $j \neq i$.

Como para cada $i \in N$ $\bar{\lambda}^i > 0$, dividiendo por este valor, podemos considerar una función de valor paramétrica

$$v^i_\gamma(m) = \gamma^i u_i(m) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} u_j(m)$$

donde el parámetro $\gamma^i \in \mathbb{R}$ se denomina grado de altruismo inverso del agente i, e indica la importancia que para el agente i tiene su propio beneficio. Así, cuanto mayor sea el valor de γ^i, mayor es la importancia que el agente i da a su propio beneficio y menor es la implicación del agente con respecto al beneficio que obtienen los otros. Denominamos al juego $G_\gamma = \{(A^i, v^i_\gamma)_{i \in N}\}$ juego imparcial y altruista con preferencias aditivas.

Sea $MV(M)$ la función real de variable real que representa el beneficio agregado si todos los agentes actúan conjuntamente. Denotemos por $S^* = argmax\{MV(M)\}$. El siguiente resultado establece los equilibrios para el juego imparcial y altruista con preferencias aditivas.

Proposición 3.3.6. *Para el juego* G_γ

a) *Si* $\gamma^i = 1 \ \forall i \in N$, $E(G_\gamma) = \{(m^1, ..., m^n) : m^i \geq 0, \ \sum_{i \in N} m^i = S^*\}$.

b) *Si* $\gamma^i < 1 \ \forall i \in N$, *entonces hay un único equilibrio* m^*. *Este equilibrio cumple* $\sum_{i \in N} m^{*i} < S^*$.

c) Si $\gamma^i > 1\ \forall i \in N$, entonces hay un único equilibrio m^*. Este equilibrio cumple $\sum_{i\in N} m^{*i} > S^*$.

Además, en b) y c) si $\gamma^j = \gamma^k$ para todo $j, k \in N$, $m^j = m^k$.

Demostración. a) Si $\gamma^i = 1$ para todo $i \in N$, $v^i_\gamma(m) = \sum_{i=1}^n u_i(m)$, es decir, $v^i_\gamma(m) = (\sum_{i=1}^n m^i)V(M) = \{MV(M)\}$, por tanto, todos los agentes maximizan la misma función. Luego, la función de mejor respuesta de todos los agentes es $R^i(m^{-i}) = S^* - \sum_{\substack{j\in N\\ j\neq i}} m^j$ y, por tanto, los equilibrios son $(m^1, ..., m^n)$ y cumplen que $\sum_{i\in N} m^i = S^*$, además de $m^i \geq 0$.

b) Si $\gamma^i < 1$ para todo $i \in N$, en primer lugar, podemos indicar que la existencia de equilibrio está asegurada porque las funciones de utilidad individuales, u_j, son cóncavas en su propia acción. Sea $(\hat{m}^i, \hat{m}^{-i})$ tal que $\sum_{i\in N} \hat{m}^i \geq S^*$. Entonces, como la función de valoración es estrictamente cóncava en su propia acción, cuando el agente i se mueve a $\hat{m}^i - \epsilon$, la función de valor aumenta, y por tanto no es un equilibrio. Además, las funciones de mejor respuesta de todos los agentes no coinciden como ocurre en el caso anterior, luego el equilibrio es único.

c) Demostración análoga a b).

Cuando $\gamma^j = \gamma^k$ para todo $j, k \in N$ en b) y c), entonces $m^j = m^k$ porque los agentes son simétricos. □

Proposición 3.3.7. *Si $\exists j, k \in N$ tales que $\gamma^j > 1, \gamma^k < 1$, no existe equilibrio.*

Demostración. Siguiendo un razonamiento similar al de la proposición anterior. □

Ejemplo 3.3.8. Para el ejemplo 3.2.1, en el que n ganaderos tienen derecho de uso de un pastizal para alimentar a sus ovejas, con $V(M) = a - M^2$, y considerando, en este caso, que los agentes son imparciales y altruistas, la función de valor que representa las preferencias aditivas es

$$v^i_\gamma(m) = (\gamma^i m^i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n m^j)(a - (\sum_{j=1}^n m^j)^2).$$

Consideramos el caso en el que todos los agentes tienen el mismo grado de altruismo $\gamma^i = \gamma$.

En la Tabla 3.2 se recogen los resultados obtenidos para los casos particulares de un único ganadero (bien privado), de dos ganaderos y el caso extremo en el que el número de ganaderos tiende a ∞, y en la Tabla 3.3, para el caso general.

Nº de ganaderos	$n = 1$	$n = 2$	$n = \infty$
Nº ovejas individual	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\sqrt{\frac{\gamma a}{8\gamma+4}}$	0
Nº ovejas total	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\sqrt{\frac{\gamma a}{2\gamma+1}}$	$\sqrt{\frac{\gamma a}{\gamma+2}}$
Ganancia individual	$2\sqrt{\frac{a^3}{3^3}}$	$\frac{\gamma+1}{2}\sqrt{\frac{\gamma a^3}{(2\gamma+1)^3}}$	0
Ganancia total	$2\sqrt{\frac{a^3}{3^3}}$	$(\gamma+1)\sqrt{\frac{\gamma a^3}{(2\gamma+1)^3}}$	0

Tabla 3.2. Equilibrios imparciales y altruistas para n=1, n=2 y $n = \infty$.

	n, γ
Nº ovejas individual	$\sqrt{\frac{\gamma a}{(\gamma+2)n^2+2(\gamma-1)n}}$
Nº ovejas total	$\sqrt{\frac{\gamma an}{(\gamma+2)n+2(\gamma-1)}}$
Ganancia individual	$\frac{2(n+\gamma-1)}{n}\sqrt{\frac{\gamma a^3 n}{((\gamma+2)n+2(\gamma-1))^3}}$
Ganancia total	$2(n+\gamma-1)\sqrt{\frac{\gamma a^3 n}{((\gamma+2)n+2(\gamma-1))^3}}$

Tabla 3.3. Equilibrios imparciales y altruistas. Caso general.

Para casos extremos de los valores de γ, se obtienen resultados interesantes. Si $\gamma = 0$, tanto el número de ovejas como la utilidad individual y total son nulos. Para $\gamma = 1$, los valores obtenidos coinciden con los del bien privado a repartir entre el número de ganaderos y si γ tiende a ∞, se obtienen los mismos resultados que si no se tiene en cuenta la utilidad de los demás ganaderos. Este sería el caso de un agente egoísta. En la Tabla 3.4 se recogen todos estos resultados.

	$\gamma = 0$	$\gamma = 1$	$\gamma = \infty$
Nº ovejas individual	0	$m^i \geq 0 : \sum_{i \in N} m^i = \sqrt{\frac{a}{3}}$	$\frac{1}{n}\sqrt{\frac{an}{n+2}}$
Nº ovejas total	0	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\sqrt{\frac{an}{n+2}}$
Ganancia individual	0	$m^i V(M), m^i \geq 0 : \sum_{i \in N} m^i = \sqrt{\frac{a}{3}}$	$\frac{2}{n}\sqrt{\frac{a^3 n}{(n+2)^3}}$
Ganancia total	0	$2\sqrt{\frac{a^3}{3^3}}$	$2\sqrt{\frac{a^3 n}{(n+2)^3}}$

Tabla 3.4. Equilibrios imparciales y altruistas para $\gamma = 0$, $\gamma = 1$ y $\gamma = \infty$.

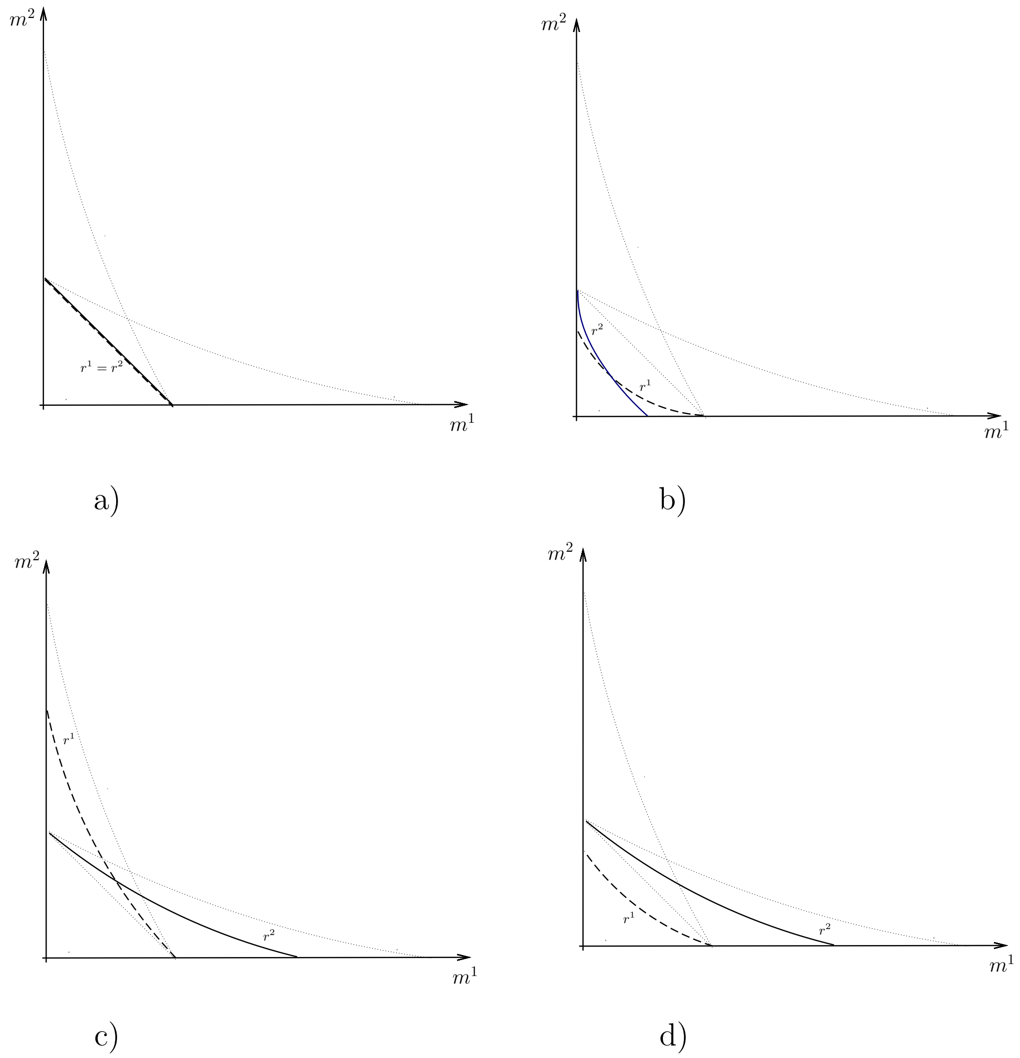


Figura 3.3. Equilibrios para agentes imparciales y altruistas. Representación aditiva.

En la Figura 3.3 se muestran las gráficas de los equilibrios para dos ganaderos, considerando distintos valores de γ^i. Si los agentes tienen grados de altruismo unitarios (Figura 3.3 a)), es decir, los agentes son ecuánimes, hay múltiples equilibrios, en la gráfica podemos ver un segmento. Este es un caso digno de mención, dado que si los agentes fuesen cooperativos buscarían maximizar la suma de todos los beneficios, lo que supone, en una representación aditiva de las preferencias, considerar que los pesos son iguales para todos. Por tanto, la cooperación se puede entender como un caso particular del altruismo. Por otra parte, cuando ambos grados de altruismo son menores que 1 (Figura 3.3 b)), hay un único equilibrio que se encuentra por debajo del segmento. Esto es, la cantidad de equilibrio es menor que la cantidad total si los agentes cooperasen. Cuando los grados de altruismo son mayores que 1 (Figura 3.3 c)), un único equilibrio por encima del segmento. Por último, si uno de ellos es inferior y el otro es superior a 1 (Figura 3.3 d)), no hay equilibrio.

En el caso estudiado anteriormente, un juego imparcial y altruista con preferencias aditivas para dos agentes, el conjunto de equilibrios es, o bien vacío, o un punto, o un segmento.

Observación 3.3.9. Es interesante señalar que en estos casos (3.3 b),c)), dado que la cantidad total de este juego es estrictamente inferior al pasto disponible, aunque se consumiese la cantidad total del juego, se consigue evitar la tragedia de los comunes.

3.3.1.2. Agentes imparciales: prosociales y egosociales

Hasta ahora hemos analizado los equilibrios para agentes imparciales y altruistas. A continuación, de forma más general, vamos a tener en cuenta solamente el carácter imparcial de los agentes con una representación aditiva de la preferencias

$$v_\lambda^i(m) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^i u_j(m)$$

donde $\lambda^i \in \Delta^n = \{\lambda^i \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^n \lambda_j^i = 1, \lambda_j^i \geq 0\}$.

Para los agentes imparciales la función de valoración es

$$v_\lambda^i(m) = \lambda_i^i u_i(m) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \bar{\lambda}^i u_j(m), k \neq i.$$

En esta ocasión, no es posible hacer una parametrización de la función de valor como cuando los agentes son imparciales y altruistas, ya que no está asegurado que los pesos asociados a las utilidades individuales de los restantes agentes sean no nulos.

Analizaremos dos tipos de comportamiento con respecto al propio beneficio. En primer lugar, consideramos los agentes prosociales como aquellos agentes imparciales para los que el beneficio propio no es más importante que el de los demás, y, en segundo lugar, los agentes egosociales son agentes imparciales para los que el beneficio propio es al menos igual de importante que el del resto. Como utilizamos una representación aditiva de las preferencias, esto se traduce en un conjunto diferente de pesos.

Definición 3.3.10. Si las preferencias del agente $i \in N$ se representan mediante una función de valor aditiva, entonces un agente i imparcial es

a) *prosocial* si $\lambda_i^i \leq \lambda_j^i, \forall j \neq i, \lambda_j^i = \lambda_k^i, , j, k \neq i$.

b) *egosocial* si $\lambda_i^i \geq \lambda_j^i, \forall j \neq i, \lambda_j^i = \lambda_k^i, j, k \neq i$.

Así, para un agente prosocial, el conjunto de pesos es $\Lambda_{pro}^i = \{\lambda^i \in \Lambda^i : \lambda_i^i \leq \lambda_j^i, \forall j \neq i, \lambda_j^i = \lambda_k^i, i \neq j, k\}$, y denotamos $\Lambda_{pro} = \times_{i \in N} \Lambda_{pro}^i$. Para un agente egosocial, se considera el siguiente conjunto $\Lambda_{ego}^i = \{\lambda^i \in \Lambda^i : \lambda_i^i \geq \lambda_j^i, \forall j \neq i, \lambda_j^i = \lambda_k^i, i \neq j, k\}$, y se denota $\Lambda_{ego} = \times_{i \in N} \Lambda_{ego}^i$.

Obsérvese que los agentes egosociales pueden ser agentes altruistas o bien egoístas. Es decir, este es un planteamiento más general que incluye también el modelo clásico de los bienes comunales, en el que los agentes sólo se preocupan por el propio beneficio. Sin embargo, los agentes prosociales son todos altruistas, puesto que si un agente es prosocial, el peso asociado al propio beneficio es inferior o igual al peso asociado al de los demás y si además la suma de los pesos debe ser igual a la unidad, el peso asignado a los beneficios de los demás es no nulo, por lo que es altruista. Es decir, los agentes prosociales constituyen un subconjunto dentro de los agentes altruistas. Asimismo, la unión de ambos conjuntos de agentes, los prosociales y los egosociales, conforma los agentes imparciales, y como caso particular, aquellos agentes que son a la vez, prosociales y egosociales, son los que hemos denominado ecuánimes.

Los bienes comunales con agentes prosociales

Desde una perspectiva social, si la importancia relativa que cada agente asigna a su beneficio individual no es superior que la que asigna al beneficio de los demás y considera a los restantes agentes por igual, tenemos un juego multicriterio, denominado *juego prosocial*, que se denota $G_{\Lambda_{pro}} = \{(A^i, u, \Lambda_{pro}^i)_{i \in N}\}$. En el siguiente resultado se establece la función de utilidad transformada para el agente i en este juego, $v_{\Lambda_{pro}}^i$.

Proposición 3.3.11. *El conjunto de equilibrios utilitaristas para el juego prosocial* $G_{\Lambda_{pro}} = \{(A^i, u, \Lambda_{pro}^i)_{i \in N}\}$ *coincide con el conjunto de equilibrios débiles del juego* $\{(A^i, v_{\Lambda_{pro}}^i)_{i \in N}\}$*, donde*

$$v_{\Lambda_{pro}}^i(m^1, ..., m^n) = (\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{m^j}{n-1} V(M), \sum_{j=1}^{n} \frac{m^j}{n} V(M)).$$

Demostración. El conjunto Λ^i_{pro} es un poliedro cuyos puntos extremos son

$$(\frac{1}{n-1},\dots,\overbrace{0}^{i},\dots,\frac{1}{n-1}),(\frac{1}{n},\dots,\frac{1}{n}),$$

entonces $v^i_{\Lambda_{pro}} = B^i \cdot u_i$, donde B^i es una matriz cuyas filas son los puntos extremos de Λ^i_{pro}, y se tiene el resultado a partir de la Proposición 2.3.6. □

La primera componente de la función de utilidad transformada del agente i es la media de los beneficios de los restantes agentes, lo que supone una preocupación extrema por los demás, al no considerar en absoluto el propio beneficio. La segunda componente es la media de los beneficios de todos los agentes, lo que representa un comportamiento social responsable.

Para obtener las funciones de reacción del agente i con respecto a las componentes de su nueva función de utilidad vectorial, como $V(M)$ es decreciente, el máximo de $\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{m^j}{n-1}V(M)$ con respecto a m^i se alcanza en $m^i = 0$, es decir, $r^i_j(m^{-i}) = 0, \forall j \neq i$. Si $r^i_s(m^{-i})$ es la función de reacción con respecto a la segunda componente, el conjunto de equilibrios de Nash viene dado en el siguiente resultado.

Lema 3.3.12. *El conjunto de los equilibrios de Nash del juego prosocial $G_{\Lambda_{pro}}$ es:*

$$E(G_{\Lambda_{pro}}) = \{(m^i, m^{-i}) \,|\, 0 \leq m^i \leq r^i_s(m^{-i}), i \in N\}.$$

Demostración. Se obtiene la demostración utilizando la Proposición 2.2.4. Consideremos un punto $(\hat{m}^i, \hat{m}^{-i})$ tal que $\hat{m}^i > r^i_s(\hat{m}^{-i})$. Como las dos componentes de la función de utilidad transformada son estrictamente ćoncavas con respecto a las acciones del agente i, ambas funciones son decrecientes para $m^i > r^i_s(\hat{m}^{-i})$, se tiene que si el agente i se mueve a $\hat{m}^i - \epsilon$, ambas aumentarán. Luego, $(\hat{m}^i, \hat{m}^{-i}) \notin E(G_{\Lambda_{pro}})$.

Además, si $0 \leq \hat{m}^i \leq r^i_s(\hat{m}^{-i})$, cualquier movimiento individual de alguno de los agentes producirá un incremento de una de las componentes y un decremento en la otra, por tanto $(\hat{m}^i, \hat{m}^{-i}) \in E(G_{\Lambda_{pro}})$. □

Ejemplo 3.3.13. Para el ejemplo 3.2.1, la función de utilidad transformada del agente i en el juego prosocial para el juego bipersonal bicriterio es

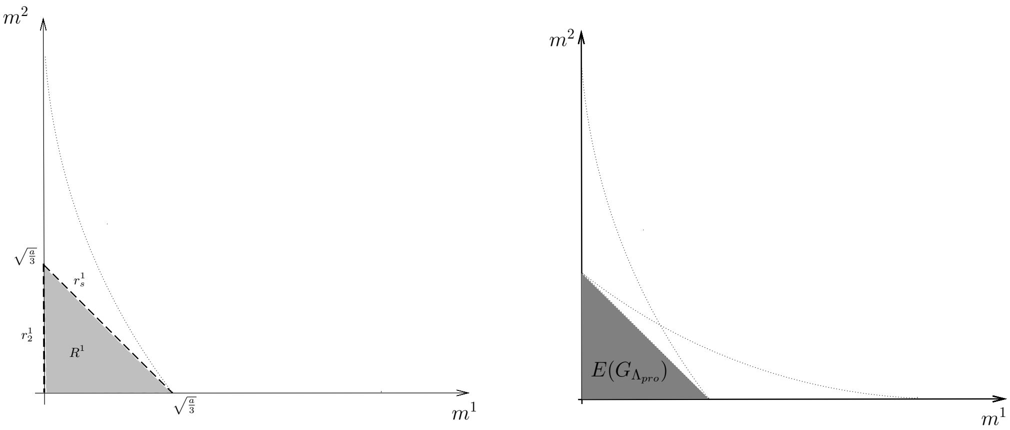
$$(v^i_1(m^1, m^2), v^i_2(m^1, m^2)) = (m^2(a - (m^1 + m^2)^2), \frac{m^1 + m^2}{2}(a - (m^1 + m^2)^2).$$

Las correspondientes funciones de mejor respuesta del agente i a las acciones del agente j con respecto a cada componente de su nueva función vectorial, y el conjunto de equilibrios son, respectivamente

$$r_1^i(m^j) = 0,\ r_s^i(m^j) = \sqrt{\frac{a}{3}} - m^j.$$

$$E(G_{\Lambda_{pro}}) = \left\{ (m^1, m^2) \in \mathbb{R}_+^2 : m^1 + m^2 \leq \sqrt{\frac{a}{3}} \right\}.$$

En la Figura 3.4 se representan las curvas de reacción de los agentes y el conjunto de equilibrios $E(G_{\Lambda_{pro}})$ del juego prosocial.



a) b)

Figura 3.4. Curvas de reacción de los agentes y equilibrios del juego prosocial.

Los bienes comunales con agentes egosociales

Si en el juego multicriterio $G = \{(A^i, u)_{i\in N}\}$, suponemos que cada agente asigna a su propio beneficio al menos la misma importancia que a los beneficios de los demás, a los que considera igual de importantes, estamos ante un agente egosocial. Al incorporar estas preferencias sociales de cada agente i en el juego $G = \{(A^i, u)_{i\in N}\}$, obtenemos un juego transformado denominado *juego egosocial* $G_{\Lambda_{ego}} = \{(A^i, u, \Lambda^i_{ego})_{i\in N}\}$. La nueva función de valor para el agente i, $v^i_{\Lambda_{ego}}$, se convierte en una función con dos componentes. La siguiente proposición establece esta nueva función.

Proposición 3.3.14. *El conjunto de equilibrios utilitaristas para el juego egosocial* $G_{\Lambda_{ego}} = \{(A^i, u, \Lambda^i_{ego})_{i\in N}\}$ *coincide con el conjunto de equilibrios débiles del juego* $\{(A^i, v^i_{\Lambda_{ego}})_{i\in N}\}$*, donde*

$$v^i_{\Lambda_{ego}}(m^1, ..., m^n) = (m^i V(M), \sum_{j=1}^{n} \frac{m^j}{n} V(M)).$$

Demostración. Como el conjunto Λ^i_{ego} es un poliedro cuyos puntos extremos son

$$(0, \ldots, 1_{i)}, \ldots, 0), (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$$

entonces $v^i_{\Lambda_{ego}} = B^i \cdot u^i$, donde B^i es una matriz cuyas filas son los puntos extremos de Λ^i_{ego}, y se tiene el resultado a partir de la Proposición 2.3.6. □

Obsérvese que la primera componente de esta nueva función del agente i, siguiendo un comportamiento racional, es su propio beneficio, es decir, su utilidad individual, u_i y la segunda componente es la media de los beneficios de todos los agentes, lo que implica un comportamiento social responsable.

Para determinar el conjunto de equilibrios para el juego *egosocial*, consideramos la función de reacción del agente i para cada componente de su función de valor. Se denota por $r^i_1(m^{-i})$ la función de reacción del agente i con respecto a la primera componente de dicha función (utilidad individual) y $r^i_s(m^{-i})$ la función de reacción de la segunda componente, la social, $\forall i \in N$. El siguiente resultado identifica estos equilibrios para el caso general.

Lema 3.3.15. *El conjunto de equilibrios de Nash del juego egosocial $G_{\Lambda_{ego}}$ es*

$$E(G_{\Lambda_{ego}}) = \{(m^i, m^{-i}) \,|\, r^i_s(m^{-i}) \leq m^i \leq r^i_1(m^{-i}), i \in N\}.$$

Demostración. La demostración es análoga a la realizada en el Lema 3.3.12, utilizando la Proposición 2.2.4. Nótese que $r^i_s(m^{-i}) < r^i_1(m^{-i}), \forall i \in N$, ya que cooperar proporciona un menor número de unidades que ser un maximizador individual.

Sea un punto $(\hat{m}^i, \hat{m}^{-i})$ tal que $\hat{m}^i < r^i_s(\hat{m}^{-i})$. Como las dos componentes de la función de valor son estrictamente cóncavas con respecto a las acciones del agente i, para $m^i < r^i_s(\hat{m}^{-i})$, se tiene que si el agente i se mueve a $\hat{m}^i + \epsilon$, entonces ambas aumentarán. Por tanto, $(\hat{m}^i, \hat{m}^{-i}) \notin E(G_{\Lambda_{ego}})$. Análogamente, se verifica para $\hat{m}^i > r^i_1(\hat{m}^{-i})$.

Por otra parte, si $r^i_s(\hat{m}^{-i}) \leq \hat{m}^i \leq r^i_1(\hat{m}^{-i})$, entonces algún movimiento individual de alguno de los agentes producirá un incremento de una de las componentes y un decremento en la otra, por tanto $(\hat{m}^i, \hat{m}^{-i}) \in E(G_{\Lambda_{ego}})$. □

Ejemplo 3.3.16. Para el ejemplo 3.2.1, la función de utilidad transformada del agente i en el juego egosocial obtenida del juego bipersonal bicriterio es

$$(v^i_1(m^1, m^2), v^i_2(m^1, m^2)) = (m^i(a - (m^1 + m^2)^2), \frac{m^1 + m^2}{2}(a - (m^1 + m^2)^2).$$

Las correspondientes funciones de mejor respuesta del agente i a las acciones del agente j con respecto a cada componente de su nueva función de valor vectorial, y el conjunto de equilibrios son, respectivamente

$$r_1^i(m^j) = \frac{-2m^j + \sqrt{(m^j)^2 + 3a}}{3},\ r_s^i(m^j) = \sqrt{\frac{a}{3}} - m^j.$$

$$E(G_{\Lambda_{ego}}) = \Big\{(m^1, m^2) \in \mathbb{R}_+^2 :\ m^1 + m^2 \geq \sqrt{\tfrac{a}{3}},\ m^1 \leq \tfrac{-2m^2+\sqrt{(m^2)^2+3a}}{3},$$
$$m^2 \leq \tfrac{-2m^1+\sqrt{(m^1)^2+3a}}{3}\}\Big\}.$$

En la Figura 3.5 se representan las curvas de reacción de los agentes y el conjunto de equilibrios $E(G_{\Lambda_{ego}})$ del juego egosocial.

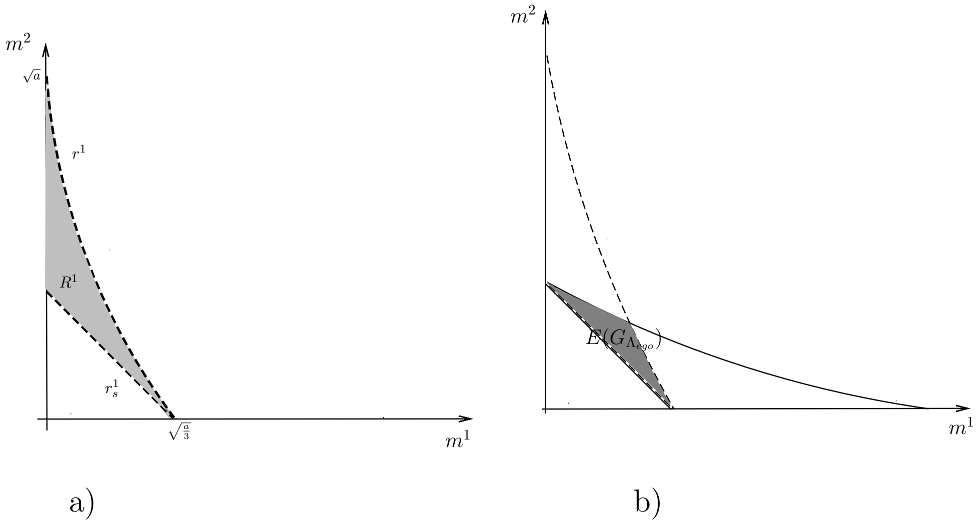


Figura 3.5. Curvas de reacción de los agentes y equilibrios del juego egosocial.

Observación 3.3.17. Es interesante poner de manifiesto que el conjunto completo de los equilibrios de Nash del juego vectorial de los bienes comunales es la unión del conjunto de los equilibrios de Nash del juego prosocial, $G_{\Lambda_{pro}} = \{(A^i, u, \Lambda^i_{pro})_{i\in N}\}$, y el conjunto de los equilibrios de Nash del juego egosocial, $G_{\Lambda_{ego}} = \{(A^i, u, \Lambda^i_{ego})_{i\in N}\}$, aunque no estamos considerando todos los posibles pesos, ya que sólo consideramos agentes imparciales, es decir, $\Lambda_{ego} \cup \Lambda_{pro} \subset \Lambda$.

El conjunto de los equilibrios de Nash del juego $G = \{(A^i, u)_{i\in N}\}$ se ha reducido incorporando en el modelo información adicional sobre las preferencias de los agentes. Sin embargo, aún tenemos una gran cantidad de equilibrios. Por ello, para delimitar el conjunto de equilibrios es necesario hacer refinamientos basados en reglas de decisión adicionales.

Para ello, consideramos una regla pesimista para elegir un subconjunto reducido del conjunto de equilibrios de Nash de entre todos los equilibrios de Nash del juego $G_{\Lambda_{pro}}$ y del juego $G_{\Lambda_{ego}}$.

Equilibrios prosociales conservadores

A continuación, proponemos un análisis diferente del problema para reducir el conjunto de los equilibrios de Nash del juego prosocial $G_{\Lambda_{pro}} = \{(A^i, u, \Lambda^i_{pro})_{i\in N}\}$. En este juego consideramos que la valoración del agente i viene dada por

$$v^i_{\Lambda_{pro}}(m^i, m^{-i}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^i_j u_j(m^i, m^{-i}),\ \forall \lambda^i \in \Lambda^i_{pro}.$$

Si los agentes muestran una actitud conservadora con respecto a los diferentes valores que toma la función aditiva, la nueva función de valor para el agente i viene dada por el mínimo valor ponderado considerando todos los posibles pesos en Λ_{pro}. Formalmente,

$$v_c^{\Lambda^i_{pro}}(m^i, m^{-i}) = \min_{\lambda^i \in \Lambda^i_{pro}} \sum_{j=1}^{n} \lambda^i_j u_j(m^i, m^{-i}).$$

Como los puntos extremos de Λ^i_{pro} son $\lambda^i_j(1) = (\frac{1}{n-1}, \ldots, \overbrace{0}^{i}, \ldots, \frac{1}{n-1})$, $\lambda^i_j(2) = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$, en virtud del Teorema 2.3.6, podemos expresar

$$v_c^{\Lambda^i_{pro}}(m^i, m^{-i}) = \min\left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda^i_j(1) u_j(m^i, m^{-i}), \sum_{j=1}^{n} \lambda^i_j(2) u_j(m^i, m^{-i}) \right\}$$

Por tanto,

$$v_c^{\Lambda^i_{pro}}(m^i, m^{-i}) = \min\left\{ \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{m^j}{n-1} V(M), \sum_{j=1}^{n} \frac{m^j}{n} V(M) \right\} =$$

$$= \begin{cases} \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{m^j}{n-1} V(M) & \text{si} \quad m^i \leq \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{m^j}{n-1} \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{m^j}{n} V(M) & \text{si} \quad m^i > \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{m^j}{n-1} \end{cases}$$

El siguiente resultado caracteriza el conjunto de los equilibrios conservadores para el juego $G_{\Lambda_{pro}} = \{(A^i, u^i, \Lambda^i_{pro})_{i\in N}\}$. Sea $S^* = argmax\{MV(M)\}$, donde $MV(M)$ es la función que representa el beneficio agregado cuando todos los agentes actúan conjuntamente.

Lema 3.3.18. *El conjunto de los equilibrios prosociales conservadores del juego n-personal $G_{\Lambda_{pro}}$ es:*

$$E_c(G_{\Lambda_{pro}}) = \left\{ (m^1, ..., m^n) \,|\, m^i = m^j, \forall i, j \in N, \, 0 \leq m^i \leq \frac{S^*}{n} \right\}.$$

Demostración. Por el Lema 3.3.12, los equilibrios prosociales conservadores están contenidos en el conjunto $E(G_{\Lambda_{pro}}) = \{(m^i, m^{-i}) \,|\, 0 \leq m^i \leq r_s^i(m^{-i}), i \in N\}$, es decir, $0 \leq m^i \leq \frac{S^*}{n}$.

Consideremos un punto $(\hat{m}^i, \hat{m}^{-i}) \in E(G_{\Lambda_{pro}})$ tal que $\hat{m}^i > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\hat{m}^j}{n-1}$, entonces como $\sum_{j=1}^n \lambda_j^i(2) u_j$ es estrictamente cóncava con respecto a las acciones del agente i, si el agente i se mueve a $\hat{m}^i - \epsilon$, la función $v_c^{\Lambda_{pro}^i} = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_j^i(2) u_j$ aumenta. Luego, $(\hat{m}^i, \hat{m}^{-i}) \notin E_c(G_{\Lambda_{pro}})$. Análogamente se demuestra que si existe i tal que $\hat{m}^i < \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\hat{m}^j}{n-1}$ y el agente i se mueve a $\hat{m}^i + \epsilon$, la función $v_c^{\Lambda_{pro}^i} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^i(1) u_j$ aumenta.

Sea $(\hat{m}^i, \hat{m}^{-i}) \in E(G_{\Lambda_{pro}})$ tal que $\forall i$, $\hat{m}^i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\hat{m}^j}{n-1}$, es decir, $m^i = m^j, \forall i, j \in N$. Luego, si el agente i se mueve a $\hat{m}^i + \epsilon$, $v_c^{\Lambda_{pro}^i} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^i(2) u_j$ disminuye, y si se mueve a $\hat{m}^i - \epsilon$, $v_c^{\Lambda_{pro}^i} = \sum_{j=1}^n \lambda_j^i(1) u_j$ disminuye. Así, $(\hat{m}^i, \hat{m}^{-i}) \in E_c(G_{\Lambda_{pro}})$. □

Ejemplo 3.3.19. Para el ejemplo 3.2.1 la función de valor para el agente i cuando considera una actitud pesimista en el conjunto de pesos Λ_{pro} es

$$v_c^{\Lambda_{pro}^i}(m^1, m^2) = \begin{cases} m^j V(M) & \text{si} \quad m^i \leq m^j \\ \frac{m^i + m^j}{2} V(M) & \text{si} \quad m^i > m^j \end{cases}$$

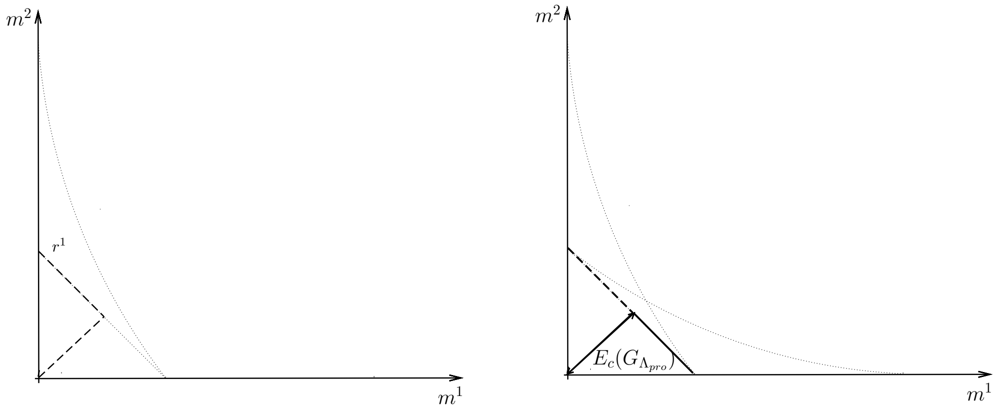
La correspondiente función de mejor respuesta del agente i a las acciones del agente j es

$$r^i(m^j) = \begin{cases} m^j & \text{si} \qquad 0 \leq m^j \leq \sqrt{\frac{a}{12}} \\ \sqrt{\frac{a}{3}} - m^j & \text{si} \quad \sqrt{\frac{a}{12}} \leq m^j \leq \sqrt{\frac{a}{8}} \end{cases}$$

y el conjunto de equilibrios prosociales conservadores es

$$E_c(G_{\Lambda_{pro}}) = \left\{ (m^1, m^2) = \left(\sqrt{\frac{a}{12}}, \sqrt{\frac{a}{12}} \right) - \gamma \left(\sqrt{\frac{a}{12}}, \sqrt{\frac{a}{12}} \right), 0 \leq \gamma \leq 1 \right\}.$$

En la Figura 3.6 se representan la curva de reacción del agente i y el conjunto de equilibrios del juego prosocial conservador.



a) b)

Figura 3.6. Curva de reacción de un agente y equilibrios prosociales conservadores.

Equilibrios egosociales conservadores

El conjunto de equilibrios del juego egosocial $G_{\Lambda_{ego}} = \{(A^i, u, \Lambda^i_{ego})_{i\in N}\}$ se reduce siguiendo un razonamiento similar. La función de valoración del agente i viene dada por la expresión $v^i_{\Lambda_{ego}}(m^i, m^{-i}) = \sum_{j=1}^n \lambda^i_j u_j(m^i, m^{-i})$, $\forall \lambda^i \in \Lambda^i_{ego}$.

Si suponemos que los agentes tienen una actitud conservadora acerca de los distintos valores que puede tomar la función aditiva, la función de valor egosocial conservadora para el agente i viene dada por el mínimo valor ponderado de entre todos los pesos posibles de Λ_{ego}. Formalmente,

$$v_c^{\Lambda^i_{ego}}(m^i, m^{-i}) = \min_{\lambda^i \in \Lambda^i_{ego}} \sum_{j=1}^n \lambda^i_j u_j(m^i, m^{-i}).$$

Teniendo en cuenta que para cada $m \in \times_{i=1}^n A^i$, $v_c^{\Lambda^i_{ego}}$ sólo depende de los puntos extremos de Λ^i_{ego}, $\lambda^i_j(1) = (0, \ldots, \overbrace{1}^{i}, \ldots, 0)$, $\lambda^i_j(2) = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$, por el Teorema 2.3.6, $v_c^{\Lambda^i_{ego}}$ se escribe como

$$v_c^{\Lambda^i_{ego}}(m^i, m^{-i}) = \min \left\{ \sum_{j=1}^n \lambda^i_j(1) u_j(m^i, m^{-i}), \sum_{j=1}^n \lambda^i_j(2) u_j(m^i, m^{-i}) \right\}$$

Por tanto,

$$v_c^{\Lambda^i_{ego}}(m^i, m^{-i}) = \min \left\{ m^i V(M), \sum_{j=1}^n \frac{m^j}{n} V(M) \right\} =$$

$$= \begin{cases} m^i V(M) & \text{si} \quad m^i \leq \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{m^j}{n-1} \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{m^j}{n} V(M) & \text{si} \quad m^i > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{m^j}{n-1} \end{cases}$$

De esta forma, en un equilibrio se maximiza el mínimo valor factible asignado a la valoración dentro del conjunto completo de pesos, dadas las acciones de los otros agentes.

El siguiente lema caracteriza el conjunto de equilibrios conservadores para el juego n-personal $G_{\Lambda_{ego}} = \{(A^i, u^i, \Lambda^i_{ego})_{i \in N}\}$, donde la función de valoración de cada agente es $v_c^{\Lambda^i_{ego}}$, $\forall i \in N$. Estos equilibrios se denominan *equilibrios egosociales conservadores*. Sean $S^* = argmax\{MV(M)\}$ y M^*, tal que $m^* = (\frac{M^*}{n}, ..., \frac{M^*}{n})$ es el equilibrio de Nash del juego escalar.

Lema 3.3.20. *El conjunto de equilibrios egosociales conservadores para el juego n-personal* $G_{\Lambda_{ego}} = \{(A^i, u^i, \Lambda^i_{ego})_{i \in N}\}$ *es:*

$$E_c(G_{\Lambda_{ego}}) = \left\{ (m^1, ..., m^n) \,|\, m^i = m^j, \forall i, j \in N, \, \frac{S^*}{n} \leq m^i \leq \frac{M^*}{n} \right\}.$$

Demostración. Análogamente a la demostración del Lema 3.3.18, se comprueba que los puntos $(m^1, ..., m^n)$ tales que $\frac{S^*}{n} \leq m^i \leq \frac{M^*}{n}$, $m^i = m^j, \forall i, j \in N$ son equilibrios y que los puntos tales que $m^i \neq m^j$ no constituyen puntos de equilibrio. □

Ejemplo 3.3.21. En el ejemplo 3.2.1, la función de valor para el agente i cuando considera una actitud pesimista en el conjunto de pesos Λ_{ego} es

$$v_c^{\Lambda^i_{ego}}(m^1, m^2) = \begin{cases} m^i V(M) & \text{si} \quad m^i \leq m^j \\ \frac{m^i + m^j}{2} V(M) & \text{si} \quad m^i > m^j \end{cases}$$

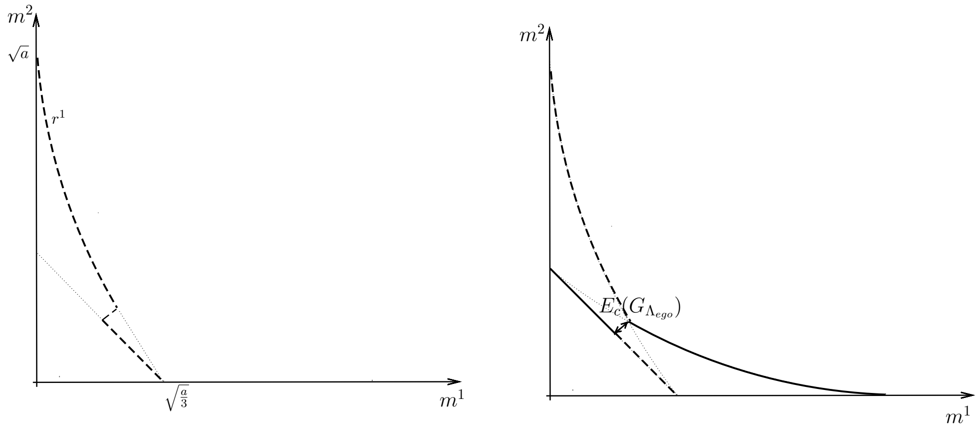
La función de mejor respuesta del agente i a las acciones del agente j es

$$r^i(m^j) = \begin{cases} \sqrt{\frac{a}{3}} - m^j & \text{si} \quad 0 \leq m^j \leq \sqrt{\frac{a}{12}} \\ m^j & \text{si} \quad \sqrt{\frac{a}{12}} \leq m^j \leq \sqrt{\frac{a}{8}} \\ \frac{-2m^j + \sqrt{(m^j)^2 + 3a}}{3} & \text{si} \quad \sqrt{\frac{a}{8}} \leq m^j \leq \sqrt{a} \end{cases}$$

y el conjunto de equilibrios egosociales conservadores es

$$E_c(G_{\Lambda_{ego}}) = \left\{ (m^1, m^2) = \gamma \left(\sqrt{\tfrac{a}{12}}, \sqrt{\tfrac{a}{12}} \right) + (1 - \gamma) \left(\sqrt{\tfrac{a}{8}}, \sqrt{\tfrac{a}{8}} \right), 0 \leq \gamma \leq 1 \right\}.$$

En la Figura 3.7 se muestra la curva de reacción del agente i y el conjunto de equilibrios del juego egosocial conservador.



a) b)

Figura 3.7. Curva de reacción de un agente y equilibrios egosociales conservadores.

3.3.2. Equilibrios maximin

El enfoque igualitarista considera una representación maximin de las preferencias del agente. De este modo, la función de valor de cada agente es $w^i_\alpha(m) = \min_{j\in J^i}\left\{\frac{u_j(m)}{\alpha^i_j}\right\}$, con $\alpha^i \in \Delta^n = \{\alpha^i \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^n \alpha^i_j = 1, \alpha^i_j \geq 0\}$.

En el siguiente resultado se establece la relación entre la actitud social de los agentes y los parámetros correspondientes a la representación maximin de las preferencias.

Lema 3.3.22. *Si la representación de las preferencias del agente $i \in N$ es maximin, entonces el agente i es*

a) ecuánime si y sólo si $\alpha^i_j = \alpha^i_k$ para todo $j, k \in N$.

b) imparcial si y sólo si $\alpha^i_j = \alpha^i_k$ para todo $j, k \neq i$.

c) altruista si y sólo si $\alpha^i_j > 0$ para algún $j \neq i$.

d) egoísta si y sólo si $\alpha^i_j = 0$ para todo $j \neq i$.

Demostración. a) Si el agente i es ecuánime, entonces para todo x, $w^i_\alpha(x) = w^i_\alpha(x_\pi)$. De este modo, para $\bar{x}$ tal que $\bar{x}_k = 1$ para $k = j$ y $\bar{x}_k = 0$ para $k \neq j$, $w^i_\alpha(\bar{x}) = \frac{1}{\alpha^i_j}$ y para todo k, existe una permutación tal que $w^i_\alpha(\bar{x}_\pi) = \frac{1}{\alpha^i_k}$. Así, $\alpha^i_j = \alpha^i_k$.

De igual modo se demuestra la implicación recíproca.

b) La demostración es análoga a la del apartado a) en $N \setminus i$.

c) $\Rightarrow$) Supongamos lo contrario de lo que queremos demostrar, es decir, que $\alpha_j^i = 0$ para todo $j \neq i$, así $\alpha_i^i = 1$ entonces $w_\alpha^i(x) = \text{mín}_{j \in P}\{\frac{x_i}{\alpha_j^i}\} = \frac{x_i}{\alpha_i^i} < \frac{\bar{x}_i}{\alpha_i^i} = w_\alpha(\bar{x})$, y esto contradice $x \succ^i \bar{x}$.

$\Leftarrow$) $\alpha_j^i > 0$ para algún $j \neq i$.

Si $\alpha_i^i = 0$, entonces tomemos x tal que $x_k = 0$ para $k \neq j$, y $x_j = 2$; y $\bar{x}$ tal que $\bar{x}_k = 1$ para $k = i$ y para $k = j$ y $\bar{x}_k = 0$ para $k \neq i, j$. En este caso, $w_\alpha^i(\bar{x}) = \frac{1}{\alpha_j^i} < \frac{2}{\alpha_j^i} = w_\alpha^i(x)$.

Si $\alpha_i^i > 0$, entonces sean u tal que $x_k = 0$ para $k \neq j$, y $x_j = a$, con $a > 1$; y $\bar{x}$ tal que $\bar{x}_k = 1$ para $k = i$ y para $k = j$ y $\bar{x}_k = 0$ para $k \neq i, j$. En este caso, $w_\alpha^i(\bar{x}) = \text{mín}\{\frac{1}{\alpha_i^i}, \frac{1}{\alpha_j^i}\} < \frac{a}{\alpha_j^i} = w_\alpha^i(x)$.

d) Un agente es egoísta si no es altruista, por tanto, usando c), es egoísta si y sólo si $\alpha_j^i = 0$ para todo $j \neq i$. □

3.3.2.1. Agentes imparciales y altruistas

La incorporación en la función de valor del carácter de los agentes conlleva un refinamiento del conjunto de pesos que cada agente considera razonable de sus utilidades, lo que permite una reducción del conjunto de equilibrios. Para calcular los equilibrios que se alcanzan cuando los agentes son imparciales y altruistas, consideramos $\alpha_j^i > 0$ para algún $j \neq i$, y además $\alpha_j^i = \alpha_k^i > 0$ para $j, k \neq i$. De este modo, la función de valor con una representación maximin de las preferencias puede expresarse como

$$w_\alpha^i(m) = \text{mín}\left\{\min_{j \neq i}\left\{\frac{u_j(m)}{\bar{\alpha}^i}\right\}, \frac{u_i(m)}{\alpha_i^i}\right\}$$

donde $\bar{\alpha}^i = \alpha_j^i > 0$ para todo $j \neq i$, con $i, j \in J^i$.

Dado que para cada $i \in N$ $\bar{\alpha}^i > 0$, multiplicando por este valor, obtenemos una función de valor paramétrica

$$w_\beta^i(m) = \text{mín}\left\{\min_{j \neq i}\{u_j(m)\}, \frac{u_i(m)}{\beta^i}\right\}$$

donde $\beta^i \in R$ se denomina grado de altruismo inverso del agente i, e indica la importancia que asigna el agente i a su propio beneficio, de modo que cuanto mayor sea este valor, menor grado de altruismo tiene el agente. El juego $G_\beta = \{(A^i, w_\beta^i)_{i \in N}\}$ se denomina juego imparcial y altruista con preferencias maximin.

Los equilibrios para el juego imparcial y altruista con preferencias maximin vienen dados en las siguientes proposiciones. Sea M^*, tal que $m^* = (\frac{M^*}{n}, ..., \frac{M^*}{n})$ es el equilibrio de Nash del juego escalar.

Proposición 3.3.23. *Para el juego G_β*

a) Si $\beta^i = 1$ para todo $i \in N$, entonces $E(G_\beta) = \{(m, ..., m) : 0 \leq m \leq \frac{M^*}{n})\}$.

b) Si $\beta^i < 1$ para todo $i \in N$, entonces $E(G_\beta) = \{(0, ..., 0)\}$.

c) Si $\beta^i > 1$ para todo $i \in N$, entonces $E(G_\beta) = \{(0, ..., 0), (\frac{M^*}{n}, ..., \frac{M^*}{n})\}$.

Demostración. a) Si $\beta^i = 1$ para todo $i \in N$, $w^i_\beta(m) = \text{mín}_{j\in N}\{u_j(m)\}$, es decir, la función a maximizar es la misma para todos, $w^i_\beta(m) = (\text{mín}_{j\in N}\{m^j\})V(M)$. Luego, hemos de distinguir dos casos para el agente i. En primer lugar, cuando $u_i < u_j, \forall j \neq i$, en cuyo caso, la función a maximizar es u_i y la mejor respuesta es r^i. Y por otra parte, cuando no ocurre eso, hay que maximizar con respecto a m_i la función $u_j(m) = m^jV(M), j \neq i$, y puesto que V es decreciente, el máximo se alcanza cuando m^i sea lo menor posible, es decir, $m^i = m^j$. Por tanto, se alcanza equilibrio cuando las funciones de mejor respuesta coinciden, es decir, cuando todos las cantidades son iguales, $m^i = m$, y con $0 \leq m \leq \frac{M^*}{n}$, ya que debe estar dentro del conjunto de todos los equilibrios del juego.

Si $\beta^i \neq 1$ para todo $i \in N$, entonces $w^i_\beta(m) = \text{mín}\left\{\text{mín}_{j\neq i}\{u_j(m)\}, \frac{u_i(m)}{\beta^i}\right\}$. Cuando $\frac{u_i(m)}{\beta^i} < u_j(m), \forall j \neq i$, la función a maximizar es u_i y la mejor respuesta es r^i. Por otra parte, si esto no ocurre, hay que maximizar con respecto a m_i la función $u_j(m) = m^jV(M), j \neq i$, y puesto que V es decreciente, el máximo se alcanza cuando m^i sea lo menor posible, es decir, $\frac{m^i}{\beta^i} = m^j$.

b) Si $\beta^i < 1$ para todo $i \in N$, $\frac{m^i}{\beta^i} = m^j$ no se cortan y las funciones de reacción se cortan sólo en (0,...,0), es decir, el único equilibrio es (0,...,0).

c) Si $\beta^i > 1$ para todo $i \in N$, las funciones de mejor respuesta se cortan en (0,...,0) y $(\frac{M^*}{n}, ..., \frac{M^*}{n})$. □

Supongamos ahora que el grado de altruismo de los agentes es distinto. Para facilitar la notación, analizamos este caso para dos agentes.

Proposición 3.3.24. *Para el juego G_β con dos agentes, si $\beta^1 > 1, \beta^2 < 1$ y*

a) $\beta^1\beta^2 = 1$, entonces $E(G_\beta) = \{m : m^2 = \frac{m^1}{\beta^1}, 0 \leq m^1 \leq r^1(m^2)\}$.

b) $\beta^1\beta^2 < 1$, entonces $E(G_\beta) = \{(0, 0)\}$.

c) $\beta^1\beta^2 > 1$*, entonces* $E(G_\beta) = \{(0,0),(m^1,m^2)\}$*, con* $m^1 = r^1(m^2), m^2 = \frac{m^1}{\beta^1}$.

Demostración. La función de valor del agente 1 es $w^1_\beta(m) = \frac{u^1(m)}{\beta^1}$ si $\frac{m^1}{\beta^1} \leq m^2$, y $w^1_\beta(m) = u_2(m)$ si $\frac{m^1}{\beta^1} \geq m^2$, por lo que la función de mejor respuesta es $m^1 = r^1(m^2)$, cuando $\frac{m^1}{\beta^1} \leq m^2$, y $m^1 = \beta^1 m^2$, en caso contrario. Análogamente, para el agente 2, la función de valor es $w^2_\beta(m) = \frac{u^2(m)}{\beta^2}$ si $\frac{m^2}{\beta^2} \leq m^1$, y $w^2_\beta(m) = u_1(m)$ si $\frac{m^2}{\beta^2} \geq m^1$, y la función de mejor respuesta es $m^2 = r^2(m^1)$, cuando $\frac{m^2}{\beta^2} \leq m^1$, y $m^2 = \beta^2 m^1$, en otro caso.

a) Como $\beta^1 = \frac{1}{\beta^2}$, las rectas $m^1 = \beta^1 m^2$ y $m^2 = \beta^2 m^1$ coinciden. Por lo tanto, los equilibrios son todos los puntos del segmento $m^1 = \beta^1 m^2$, con $0 \leq m^1 \leq r_1(m^2)$.

b) Como $\beta^1 < \frac{1}{\beta^2}$, entonces $m^1 = \beta^1 m^2 < \frac{1}{\beta^2} m^2$, luego en las funciones de mejor respuesta no se cortan $m^1 = \beta^1 m^2$ y $m^2 = \beta^2 m^1$. La intersección de las funciones de mejor respuesta es $(0,0)$, y por tanto, $(0,0)$ es el único equilibrio.

c) Como $\beta^1 > \frac{1}{\beta^2}$, los equilibrios son los puntos de corte, que, en este caso, son $(0,0)$ y la intersección de $m^1 = r^1(m^2)$ con $m^2 = \frac{m^1}{\beta^1}$. □

Hay que resaltar que, en este caso, siempre hay equilibrio, ya que la no utilización del recurso siempre es un equilibrio.

Ejemplo 3.3.25. En el ejemplo 3.2.1 con agentes imparciales y altruistas, la función de valor que representa las preferencias maximin es

$$w^i_\beta(m) = \text{mín}\left\{\text{mín}_{j\neq i}\{m^j\}, \frac{m^i}{\beta^i}\right\}(a - (\sum_{j=1}^{n} m^j)^2).$$

En la Tabla 3.5 se muestran los resultados cuando todos los agentes tienen el mismo grado de altruismo, en los casos en que sea menor, igual o mayor que 1.

$\beta^j = \beta^k = \beta$	$\beta < 1$	$\beta = 1$	$\beta > 1$
m^i	0	$0 \leq m^i \leq \frac{1}{n}\sqrt{\frac{an}{n+2}}$	$0, \frac{1}{n}\sqrt{\frac{an}{n+2}}$

Tabla 3.5. Equilibrios maximin con igual grado de altruismo.

Si los agentes tienen distintos grados de altruismo, los resultados para dos ganaderos se exponen a continuación en la Tabla 3.6.

$\beta^1 > 1, \beta^2 < 1$	$\beta^1\beta^2 < 1$	$\beta^1\beta^2 = 1$	$\beta^1\beta^2 > 1$
m^1	0	$0 \leq m^1 \leq \sqrt{\frac{3a(\beta^1)^2}{(3\beta^1+2)^2-1}}$	$\sqrt{\frac{3a(\beta^1)^2}{(3\beta^1+2)^2-1}}$
m^2	0	$m^2 = \frac{m^1}{\beta^1}$	$\sqrt{\frac{3a}{(3\beta^1+2)^2-1}}$

Tabla 3.6. Equilibrios maximin con distintos grados de altruismo.

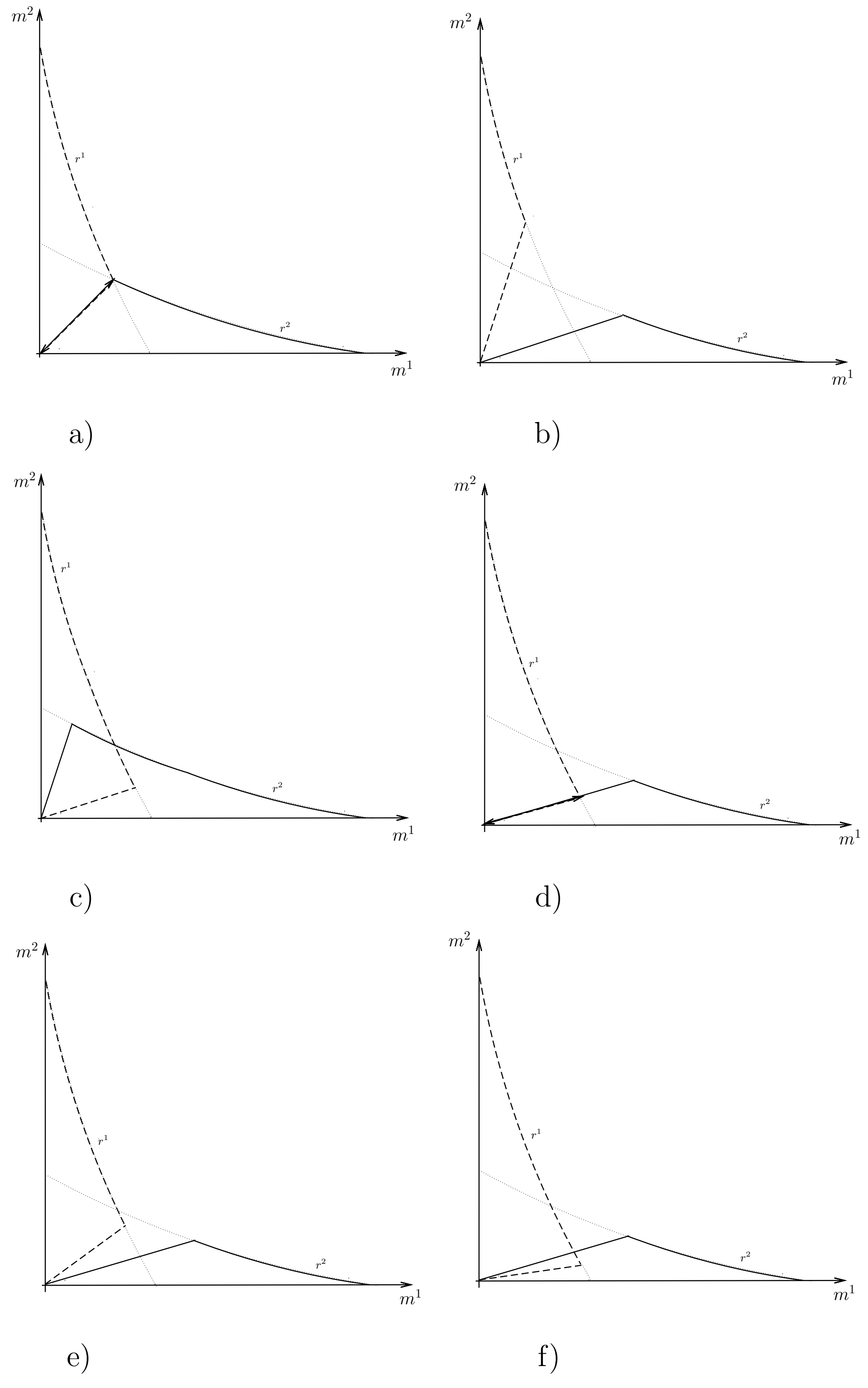


Figura 3.8. Equilibrios para agentes imparciales y altruistas. Representación maximin.

Para casos extremos de los valores de β, se obtienen resultados interesantes. Si $\beta = 0$, tanto el número de ovejas como la utilidad individual y total son nulos. Para $\beta = 1$, los valores obtenidos coinciden con los del bien privado a repartir entre el número de ganaderos y si β tiende a ∞, se obtienen los mismos resultados que si no se tiene en cuenta la utilidad de los demás ganaderos.

En la Figura 3.8 se representan, para dos ganaderos, los equilibrios para distintos valores de β^i. Si los agentes tienen grados de altruismo unitarios (Figura 3.8 a)), hay múltiples equilibrios, que constituyen un segmento distinto del obtenido en el caso aditivo. Cuando ambos grados son menores que 1 (Figura 3.8 b)), hay un único equilibrio, la no utilización de los recursos, y cuando son mayores que 1 (Figura 3.8 c)), hay otro equilibrio además de la no utilización de los recursos. Por último, si uno de ellos es inferior y el otro es superior a 1, se presentan tres casos: hay múltiples equilibrios (Figura 3.8 d)), o solamente hay un equilibrio (Figura 3.8 e)), o bien hay dos equilibrios (Figura 3.8 f)), todo ello en función de si el producto de los niveles de altruismo es igual, mayor o menor que 1.

Observación 3.3.26. Obsérvese que, para agentes ecuánimes, es decir, con niveles de altruismo unitarios, siempre hay múltiples equilibrios, tanto para preferencias aditivas como maximin. En el caso de preferencias aditivas, los equilibrios dependen de forma continua del nivel de altruismo de los agentes, y se verifica que, para agentes no ecuánimes, hay equilibrio si y sólo si ambos son altruistas o ambos egoístas. Sin embargo, los equilibrios con preferencias maximin ponderadas se caracterizan por ser más robustos con respecto a los niveles de altruismo y por que la no utilización de los recursos es siempre un equilibrio. Existen, además, otros equilibrios alternativos cuando el producto de los niveles de altruismo es mayor o igual que uno.

3.4. El modelo clásico de Cournot

El modelo de Cournot se describe como un juego, cuyos elementos son los siguientes:

- N es el conjunto de n empresas (agentes del juego) que producen un bien y compiten en el mercado, $N = \{1, ..., n\}$.
- q^i es el número de unidades del bien que produce el agente i , $i \in N$, $q =$

$(q^1, ..., q^n)$.

- Q es la cantidad total del bien producida en el mercado, $Q = \sum_{j=1}^{n} q^j$.

- $P(Q)$ es el precio del bien determinado por la función de demanda inversa, y que es una función dos veces continuamente diferenciable, estrictamente decreciente, cóncava y no-negativa en un intervalo acotado $(0, Q^+)$ tal que $P(Q) = 0$ para $Q \geq Q^+$ (Kreps y Scheinkman, 1983).

- $A^i \subseteq \mathbb{R}_+$ es el conjunto de estrategias de cada empresa, en este caso, cantidades de producto, $A^i = [0, Q^+]$ para $i \in N$, dado que las empresas sólo pueden seleccionar cantidades no negativas y además no están incluidas cantidades extremadamente grandes de producto.

- $u_i : \times_{i=1}^{n} A^i \to \mathbb{R}$ es la función de utilidad del agente i dada por sus beneficios. Para simplificar el estudio, se supone que las empresas no tienen costes fijos, que sus costes marginales son nulos, y que el precio de reserva y el tamaño de mercado son finitos. Así, $u_i(q^i, q^{-i}) = q^i P(\sum_{j=1}^{n} q^j)$, con $q^{-i} = (q^1, \ldots, q^{i-1}, q^{i+1}, \ldots, q^n)$.

De este modo, $G = \{(A^i, u_i)_{i \in N}\}$ representa el juego de Cournot.

En la versión original de este modelo las empresas actúan simultáneamente y deciden el nivel de producción, actuando como monopolistas en la parte de mercado que le dejan el resto de empresas. Una vez que las empresas deciden la cantidad a producir, los precios se desplazan a los niveles que acepta el mercado y que vienen determinados por la función de demanda. Aplicando los conceptos de la teoría de juegos, si cada empresa piensa racionalmente en las consecuencias de sus decisiones, suponiendo que las restantes empresas también conocen la situación y también deciden racionalmente, los niveles de producción de equilibrio que corresponden al modelo de Cournot son los que corresponden al equilibrio de Nash, y por ello el equilibrio de este modelo se denomina también equilibrio de Cournot- Nash. De este modo, el equilibrio de Cournot-Nash viene dado por el punto de corte de las funciones de reacción. El problema de cada agente es maximizar $u^i(q^i, q^{*-i})$, de donde se obtiene el equilibrio de Cournot-Nash, $q^* = (\frac{Q^*}{n}, ..., \frac{Q^*}{n})$, con $Q^* = argmax_{q^i \in A^i} u_i(q^i, q^{*-i})$.

Ejemplo 3.4.1. Dos empresas compiten en el mercado produciendo un bien homogéneo, con una demanda lineal $P(Q) = a - bQ$, con a, $b > 0$. El beneficio de la empresa i viene dado por

$$u_i(q^1, q^2) = q^i(a - b(q^1 + q^2)).$$

La función de mejor respuesta de cada empresa es

$$r^i(q^j) = \frac{a}{2b} - \frac{q^j}{2}.$$

Obsérvese que si la empresa competidora ofrece la cantidad de competencia perfecta o una cantidad superior, la mejor respuesta de la empresa es ofrecer una cantidad nula, por lo que la cantidad de competencia perfecta es el valor Q^+ mencionado anteriormente. Y si la empresa competidora ofrece una cantidad nula, la mejor respuesta de la empresa es ofrecer la cantidad de monopolio. El equilibrio Cournot Nash viene dado por el punto de corte de las funciones de mejor respuesta

$$(q^{*1}, q^{*2}) = \left(\frac{a}{3b}, \frac{a}{3b}\right).$$

La situación queda ilustrada en la Figura 3.9.

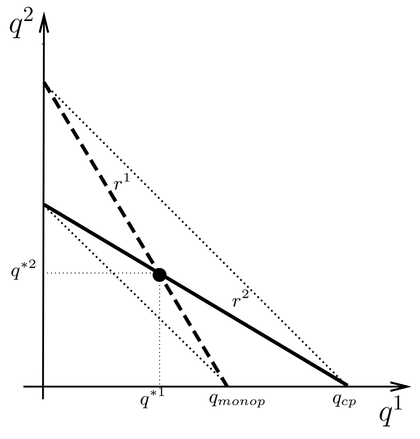


Figura 3.9. Equilibrio de Cournot.

El equilibrio del modelo de Cournot genera un coste social menor que el del monopolio, puesto que la cantidad total que se produce es mayor y, por tanto, el precio es menor. Se define el coste social como la diferencia que existe entre el beneficio social que se alcanza en competencia perfecta, que es el máximo posible suponiendo que los agentes son racionales y, por tanto, maximizan su propia utilidad, y el beneficio social que se alcanza en otro tipo de estructura de mercado como puede ser el monopolio, el oligopolio o la competencia monopolística. A su vez, el beneficio social es la suma de los beneficios que obtienen todos los agentes implicados, que en este caso son las empresas y los consumidores.

Si las empresas son maximizadoras de beneficios y compiten bajo los supuestos de Cournot, el coste social es inevitable. No obstante, como veremos a continuación, este resultado se relaja cuando consideramos otros objetivos para las empresas, más allá de la maximización de los beneficios. De hecho, cuanto menor es el coste social, mayor es la eficiencia del equilibrio que se alcanza y , por tanto, es deseable reducir el coste social.

3.5. El modelo de Cournot con responsabilidad social

En esta sección estudiamos las empresas que compiten en el mercado y tienen en cuenta no sólo su beneficio económico, sino también un objetivo social, por lo que son empresas socialmente responsables. Sin pérdida de generalidad, circunscribimos el estudio al caso de dos empresas, donde A^i es el conjunto de estrategias que el agente i puede adoptar. Cada empresa, junto al objetivo de maximizar su beneficio, es decir, su utilidad individual, $u_1^i(q^1, q^2) = u_i(q^1, q^2)$, incorpora un objetivo social, representado por $u_2^i(q^1, q^2) = \mu^i s(q^1 + q^2)$, donde s es una función de la cantidad total, $Q = q^1 + q^2$ y μ^i es un parámetro denominado grado de responsabilidad social del agente i, y que indica la importancia que el agente i asigna al objetivo social. Por ello, $u_\mu^i : A^1 \times A^2 \to \mathbb{R}^2$ es la función de utilidad vectorial del agente i en este modelo.

En un marco general, la función s puede tener en cuenta los beneficios de las restantes empresas, o bien a los otros protagonistas del mercado, considerando el excedente del consumidor, o bien puede internalizar externalidades, que se producen cuando los efectos del mercado no son asumidos por los que generan dichos efectos, y que no están reflejadas en el precio del producto. Estas pueden ser externalidades positivas, tales como la inversión en I+D+i, o externalidades negativas, como por ejemplo, la contaminación.

Por tanto, $G^\mu = \{(A^i, u_\mu^i)_{i=1,2}\}$ es un juego en forma normal con funciones de utilidad vectoriales

$$u_\mu^i(q) = (u_i(q), \mu^i s(Q)).$$

La consideración de una función vectorial supone un planteamiento distinto de la responsabilidad social, que incluye el modelo clásico de Cournot, cuando $\mu^i = 0$. En la literatura precedente, para el estudio de la responsabilidad social se define frecuentemente una función que aglutina ambos objetivos. Sin embargo, aquí se le da un tratamiento multidimensional, dado que ambos objetivos tienen distinta entidad.

En este contexto, se define un equilibrio de Nash para este juego con funciones de utilidad vectoriales como la extensión natural del concepto de equilibrio de Nash clásico.

Definición 3.5.1. (q^{*1}, q^{*2}) es un equilibrio de Nash para el juego $G^\mu = \{(A^i, u^i_\mu)_{i=1,2}\}$ si $\nexists\ q^1 \in A^1$ tal que $u^1_\mu(q^1, q^{*2}) \geq u^1_\mu(q^{*1}, q^{*2})$ y $\nexists\ q^2 \in A^2$ tal que $u^2_\mu(q^{*1}, q^2) \geq u^2_\mu(q^{*1}, q^{*2})$.

El conjunto de equilibrios de Nash para $G^\mu = \{(A^i, u^i_\mu)_{i=1,2}\}$ se denota como $E(G^\mu)$.

Para $i, j = 1, 2$ con $i \neq j$, R^i es la correspondencia que representa la mejor respuesta del agente i a las acciones del agente j. Dado que para utilidades vectoriales, en general, la mejor respuesta de un agente a una acción de otro agente no es única, $R^i(q^j) \subseteq A^i$, un par de estrategias (q^{*1}, q^{*2}) es un equilibrio de Nash para el juego $G^\mu = \{(A^i, u^i_\mu)_{i=1,2}\}$ si y sólo si $q^{*i} \in R^i(q^{*j})$ para $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. En los juegos que estudiamos en este capítulo las estrategias se refieren a cantidades, así $A^i \subseteq \mathbb{R}_+$. Además, se supone que la cantidad total que los agentes están dispuestos a ofrecer está acotada por una constante positiva, $A^i = [0, K^i]$ para $i = 1, 2$.

Vamos a considerar que el objetivo social es maximizar el excedente del consumidor. Análogo razonamiento puede hacerse con una externalidad positiva, y para externalidades negativas haremos un estudio posterior. El concepto de excedente del consumidor fue desarrollado por Marshall (1890) y constituye la base de la economía del bienestar y del análisis coste-beneficio. Se define como la diferencia entre lo que está dispuesto a pagar el consumidor y lo que realmente paga, es decir, se deduce de la utilidad marginal decreciente que las sucesivas unidades demandadas le reportan al consumidor, considerando que el precio que paga por cada una de ellas en un mercado competitivo es siempre el mismo.

La función social s es una función creciente de la cantidad total, $Q = q^1 + q^2$, hasta cierto valor. Como se supone que la empresa tiene en cuenta el objetivo social siempre que haya beneficios positivos, el valor máximo que puede alcanzar Q coincide con la cantidad de competencia perfecta del mercado, Q_{CP}.

3.5.1. Empresas con responsabilidad social positiva

Cuando la empresa j ofrece q^j, la empresa $i, i \neq j$ puede ofrecer una cantidad que se encuentra entre su mejor respuesta individual y la cantidad que hace que el total sea igual a la competencia perfecta. La función s es estrictamente creciente en la cantidad total, Q, ya que, si se desvían de sus estrategias, la empresa i siempre mejorará uno de sus objetivos, pero empeorará el otro, si consideramos $\mu^i > 0$. Nótese que si $\mu^i = 0$, es el modelo clásico de Cournot. Como consecuencia, el conjunto de equilibrios de Nash del juego extendido es la intersección de ambos conjuntos de mejor respuesta.

El siguiente resultado caracteriza los equilibrios de Nash para el juego vectorial. Sea Q_{CP} la cantidad de competencia perfecta.

Proposición 3.5.2. *El conjunto de los equilibrios de Nash del juego G^μ es*

$$E(G^\mu) = \{(q^1, q^2) : q^1 + q^2 \leq Q_{CP}, q^i \geq r^i(q^j), i, j = 1, 2, i \neq j\}.$$

Demostración. Se deduce de la Proposición 2.2.4. □

Ejemplo 3.5.3. Continuamos con las dos empresas maximizadoras de beneficios del ejemplo 3.4.1 que inicialmente compiten bajo las hipótesis de Cournot, con una función de demanda lineal $P(Q) = a - bQ$, a, $b > 0$, que no tienen costes fijos y con costes marginales nulos. En el juego escalar, los objetivos de maximizar beneficios de las empresas se representan por $u_i(q^1, q^2) = q^i(a - b(q^1 + q^2))$, $i = 1, 2$, y el par de estrategias en equilibrio es $(q^{1*}, q^{2*}) = (\frac{a}{3b}, \frac{a}{3b})$.

En el caso que analizamos, ambas empresas consideran un objetivo social, representado por $\mu^i s(q^1 + q^2)$, donde μ^i es el grado de responsabilidad social del agente i, y s es una función estrictamente creciente en $Q = q^1 + q^2$, hasta la cantidad de competencia perfecta del mercado, que es $\frac{a}{b}$. El conjunto de equilibrios es

$$E(G^\mu) = \left\{(q^1, q^2) : q^1 \geq \frac{a - bq^2}{2b}, q^2 \geq \frac{a - bq^1}{2b}, q^1 + q^2 \leq \frac{a}{b}\right\}.$$

Los equilibrios del juego G^μ varían según los grados de responsabilidad social de las empresas. Si ambas empresas tienen grados nulos de responsabilidad social, estamos ante el modelo clásico de empresas maximizadoras de beneficios, tratado en la sección anterior, para el que el equilibrio es el denominado equilibrio de Cournot. Si uno de los grados es no nulo, una de las empresas tiene grado positivo de responsabilidad social y el conjunto de equilibrios coincide con un subconjunto de la curva de reacción de dicha empresa. Si el grado de responsabilidad social de ambas es no nulo, el conjunto de equilibrios es más amplio. En el siguiente resultado se describen estos conjuntos.

Proposición 3.5.4. *Para el juego* G^μ

a) Si $\mu^i = 0, \mu^j > 0, i \neq j, i = 1, 2,$ *entonces* $E(G^\mu) = \{(q^1, q^2) : q^i = r^i(q^j), q^j \geq r^j(q^j), q^1 + q^2 \leq Q_{CP}\}$.

c) Si $\mu^i > 0, i = 1, 2,$ *entonces* $E(G^\mu) = \{(q^1, q^2) : q^1 \geq r^1(q^2), q^2 \geq r^2(q^1), q^1 + q^2 \leq Q_{CP}\}$.

Demostración. Es consecuencia de la Proposición 2.2.4. □

El efecto de la incorporación del objetivo social en la utilidad de los agentes es que emergen nuevos equilibrios, en los que la empresa socialmente responsable ofrece unas cantidades mayores a la cantidad de Cournot y la empresa exclusivamente maximizadora de beneficios actúa con su mejor respuesta a la Cournot.

Ejemplo 3.5.5. Consideramos las empresas del ejemplo 3.4.1 con una función de demanda lineal $P(Q) = a - bQ$, a, $b > 0$, con un objetivo económico y otro social.

En la Figura 3.10 se representan las funciones de mejor respuesta y los conjuntos de equilibrios en el caso en que la empresa 1 sea socialmente responsable y la empresa 2 sea maximizadora de beneficios. La empresa 1 puede ofrecer una cantidad que se encuentra entre su mejor respuesta en el juego de Cournot y la cantidad que hace que el total sea igual a la competencia perfecta, ya que si se desvían de sus estrategias, la empresa 1 siempre mejorará uno de sus objetivos, pero empeorará el otro. Por otra parte, la mejor respuesta de la empresa 2 a las acciones de la empresa 1 coincide con la del juego de Cournot. Como consecuencia, el conjunto de equilibrios es la intersección representada por el segmento de trazo más grueso que aparece en la Figura 3.10.

$$E(G^\mu) = \left\{ (q^1, q^2) : \frac{a}{3b} \leq q^1 \leq \frac{a}{b},\, q^2 = \frac{a - bq^1}{2b} \right\}.$$

Si ambas empresas tienen grado de responsabilidad social positivo, el conjunto de equilibrios viene dado por

$$E(G^\mu) = \left\{ (q^1, q^2) : q^1 \geq \frac{a - bq^2}{2b}, q^2 \geq \frac{a - bq^1}{2b}, q^1 + q^2 \leq \frac{a}{b} \right\}.$$

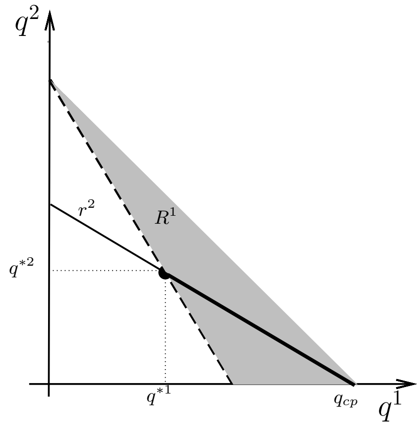


Figura 3.10. Mejores respuestas y equilibrio para una empresa maximizadora de beneficios y otra con grado de responsabilidad social positivo.

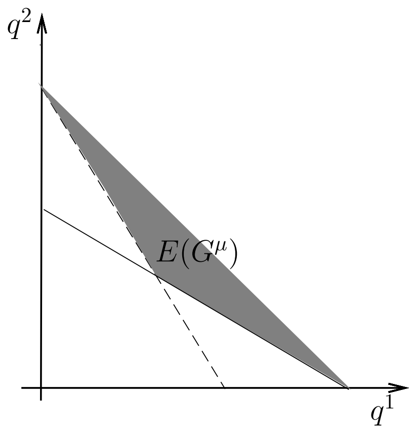


Figura 3.11. Equilibrios para dos empresas con grado de responsabilidad social positivo.

En la Figura 3.11 se representan los conjuntos de mejor respuesta, tales que la cantidad que ofrece cada empresa se encuentra entre su mejor respuesta en el juego de Cournot y la cantidad tal que el total es igual a la competencia perfecta; y el conjunto de equilibrios se calcula como la intersección de dichos conjuntos de mejor respuesta.

3.5.2. Empresas con responsabilidad social negativa

Completamos este estudio considerando valores negativos de μ^i, es decir, empresas con grados de responsabilidad social negativos. En este caso, el conjunto de equilibrios también depende de que ambas empresas, o sólo una de ellas, tengan grado de responsabilidad social negativo. El siguiente resultado caracteriza dichos conjuntos de forma análoga al caso anterior. Sea Q_M la cantidad de monopolio.

Proposición 3.5.6. *Para el juego G^μ*

a) Si $\mu^i = 0, \mu^j < 0, i \neq j, i = 1, 2,$ entonces $E(G^\mu) = \{(q^1, q^2) : q^i = r^i(q^j),\ q^j \leq r^j(q^j),\ q^1 + q^2 \geq Q_M\}$.

b) Si $\mu^i < 0, i = 1, 2,$ entonces $E(G^\mu) = \{(q^1, q^2) : 0 \leq q^1 \leq r^1(q^2),\ 0 \leq q^2 \leq r^2(q^1),\ q^1 + q^2 \geq Q_M\}$.

La incorporación del objetivo social con un parámetro negativo agrega nuevos equilibrios, en los que la empresa con grado de responsabilidad social negativo ofrece unas cantidades menores a la cantidad de Cournot.

Ejemplo 3.5.7. Si en el ejemplo 3.4.1 alguna empresa, o ambas, tiene grado de responsabilidad social negativo con una función de demanda lineal $P(Q) = a - bQ$, a, $b > 0$, y considerando un objetivo económico y otro social, los conjuntos de equilibrios se representan en las Figuras 3.12 y 3.13.

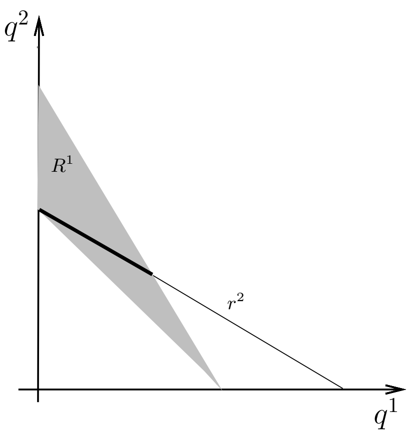


Figura 3.12. Mejores respuestas y equilibrio para una empresa con grado de responsabilidad social negativo y otra maximizadora de beneficios.

Si la empresa 1 tiene grado de responsabilidad social negativo y la empresa 2 es exclusivamente maximizadora de beneficios, la empresa 1 puede ofrecer una cantidad que se encuentra entre la cantidad que hace que el total sea igual a la cantidad de monopolio y su mejor respuesta en el juego de Cournot, puesto que si se desvía de estas estrategias, la empresa 1 siempre mejorará uno de sus objetivos, y empeorará el otro. De nuevo, la mejor respuesta de la empresa 2 a las acciones de la empresa 1 coincide con la del juego de Cournot. Por tanto, el conjunto de equilibrios es el segmento de trazo más grueso que aparece en la Figura 3.12.

$$E(G^{\mu}) = \left\{ (q^1, q^2) : \; 0 \leq q^1 \leq \frac{a}{3b}, \; q^2 = \frac{a - bq^1}{2b} \right\}.$$

Por otra parte, si ambas empresas tienen grado de responsabilidad social negativo, el conjunto de equilibrios, representado en la gráfica 3.13, viene dado por

$$E(G^{\mu}) = \left\{ (q^1, q^2) : \; q^1 \leq \frac{a - bq^2}{2b}, q^2 \leq \frac{a - bq^1}{2b}, q^1 + q^2 \geq \frac{a}{2b} \right\}.$$

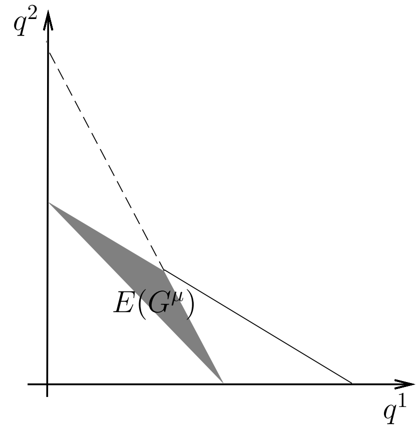


Figura 3.13. Equilibrios para dos empresas con grado de responsabilidad social negativo.

3.5.3. Empresas con responsabilidad social de distinto signo

Puede ocurrir que las empresas tengan grados de responsabilidad social de distinto signo, es decir, una tiene grado de responsabilidad social positivo y la otra, grado de responsabilidad social negativo. En este caso, el conjunto de equilibrios es el siguiente.

Proposición 3.5.8. *Para el juego G^μ, si $\mu^i < 0, \mu^j > 0$, $i, j = 1, 2, i \neq j$,*

$$E(G^\mu) = \{(q^1, q^2) : 0 \leq q^i \leq r^i(q^j), q^j \geq r^j(q^i), Q_M \leq q^1 + q^2 \leq Q_{CP}\}.$$

En esta situación, al incorporar el objetivo social, los nuevos equilibrios son tales que la empresa con grado de responsabilidad social positivo produce una cantidad mayor que la de Cournot, y con ello aumenta el excedente del consumidor, y la otra, una cantidad menor a la cantidad de Cournot, disminuyendo así el excedente del consumidor. Es de resaltar que existen equilibrios que permiten disminuir el coste social.

Ejemplo 3.5.9. Si cada una de las empresas del ejemplo 3.4.1, con función de demanda lineal $P(Q) = a - bQ$, a, $b > 0$, tiene un grado de responsabilidad social de distinto signo, el conjunto de equilibrios viene dado en la Figura 3.14.

Si la empresa 1 tiene un grado de responsabilidad social positivo y la empresa 2 un grado negativo, la empresa 1 puede ofrecer una cantidad que se encuentra entre su mejor respuesta en el juego de Cournot y la cantidad que hace que el total sea igual a la competencia perfecta, mientras que la empresa 2 puede ofrecer una cantidad por debajo de su mejor respuesta en el juego de Cournot, ya que si se desvían de estas estrategias, mejorará uno de sus objetivos, y empeorará el otro. De este modo, el conjunto de equilibrios es la región resaltada en la Figura 3.14.

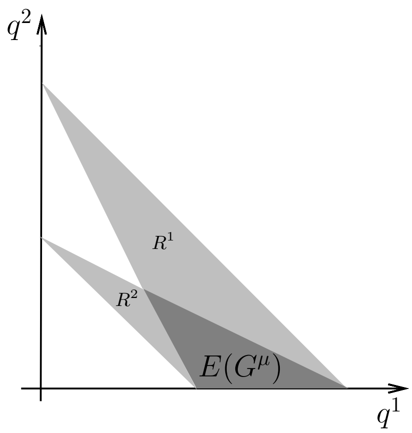


Figura 3.14. Mejores respuestas y equilibrio para una empresa con grado positivo y otra con grado negativo de responsabilidad social.

$$E(G^\mu) = \left\{(q^1, q^2) : \, q^1 \geq \frac{a - bq^1}{2b}, 0 \leq q^2 \leq \frac{a - bq^2}{2b}\right\}.$$

Cabe señalar que, en este caso, existen equilibrios que permiten reducir el coste social.

Con el estudio realizado hemos contemplado todos los posibles valores que pueden tomar las cantidades a ofrecer por las empresas, desde no ofrecer nada hasta la cantidad de competencia perfecta.

Capítulo 4

Oligopolio de Cournot bajo incertidumbre

4.1. Introducción

Este capítulo está dedicado al análisis de una extensión del modelo de oligopolio de Cournot (1838). En concreto, al estudio de la competencia entre empresas con funciones de demanda bajo incertidumbre, en la que hay dos escenarios futuros posibles y no existe información sobre la probabilidad de ocurrencia de los mismos. Las empresas deben tomar sus decisiones antes de que se resuelva la incertidumbre acerca del escenario que ocurrirá, sabiendo que en cada escenario existe una demanda de mercado diferente. Por tanto, el precio final del producto y los beneficios de las empresas dependen del escenario que finalmente ocurra.

En este marco de escenarios múltiples, para describir las funciones de mejor respuesta de las empresas, se tendrán en cuenta las diferentes actitudes de éstas hacia el riesgo. Una empresa es aversa al riesgo si da mayor importancia relativa al escenario con menores beneficios, y ocurre lo contrario para las empresas con propensión al riesgo. Más concretamente, se consideran las situaciones extremas. Las empresas que presentan aversión al riesgo son las que sólo tienen en cuenta el escenario con menores beneficios y se denominan conservadoras. Por otra parte, las empresas optimistas son las que tienen preferencia por el riesgo, y sólo consideran el escenario con mayores beneficios. En una situación intermedia se encuentran las empresas neutrales.

La mayoría de los modelos clásicos de oligopolio supone la certidumbre como algo inherente al modelo. Sin embargo, en la realidad no siempre es posible asegurar que no habrá sucesos aleatorios que influyan en los resultados de la competencia del oligopolio. De hecho, las empresas se enfrentan continuamente a la incertidumbre ya sea en la demanda, en los costes, en los precios o en otras características del mercado, por lo que es conveniente tener en cuenta la incertidumbre en el proceso de decisión.

No obstante, existen estudios previos sobre competencia en un oligopolio bajo incertidumbre que analizan las condiciones para la existencia de equilibrios y sus propiedades, con el fin de proporcionar una estructura general para el análisis de la cantidad de competencia bajo demanda con incertidumbre. Así, Lagerlöf (2007) establece las condiciones sobre funciones de distribución de la demanda estocástica que garantizan la existencia de un único equilibrio en una estructura lineal. Por otra parte, Einy et al. (2010) muestran ejemplos en los que puede no existir un equilibrio de Cournot (Bayesiano) en estrategias puras cuando las empresas tienen información incompleta sobre la demanda y los costes, además de encontrar condiciones suficientes para la existencia y unicidad del equilibrio de Cournot en cierta clase de empresas. De Frutos y Fabra (2011) y Lepore (2012) consideran juegos en dos etapas para analizar la competencia entre empresas bajo incertidumbre en la demanda.

En muchos de los trabajos existentes, el análisis de la incertidumbre se afronta, o bien por medio de una variable aleatoria en el correspondiente parámetro del modelo, o bien considerando una distribución de probabilidad en el escenario o estado de la naturaleza que vaya a tener lugar. Bajo esas premisas, se suele aplicar la teoría de la utilidad esperada (Savage, 1954) para tomar decisiones. Sin embargo, en muchas situaciones no se dispone de información completa sobre la distribución de probabilidad de la variable aleatoria, y en otras, la información inexacta sobre la distribución de probabilidad o los parámetros puede llevar a predicciones irreales. Por ello, Gilboa y Schmeidler (1989) utilizaron los conocidos modelos maximin y maximax para hacer un estudio de elección bajo incertidumbre.

Asimismo, la mayoría de los trabajos sobre modelos de oligopolio bajo incertidumbre suponen que las empresas son neutrales al riesgo y pueden compartir o intercambiar su información acerca de la incertidumbre del mercado con su competidor. Entre otros, Novshek and Sonnenchein (1982), Clarke (1982,1983), Vives (1984), Gal-Or (1985), y Kirby (1988) investigan cómo afecta al comportamiento de la empresa la incertidumbre sobre la demanda del mercado o bien sobre el coste marginal constante.

Sin embargo, la experiencia demuestra que los agentes exhiben actitudes diferentes hacia el riesgo, sobre todo en casos de incertidumbre. Asplund (2002) introdujo la actitud ante el riesgo en el modelo de oligopolio, y aplicó la teoría de la utilidad esperada para analizar la competencia en precios y cantidades con empresas aversas al riesgo, estudiando la incertidumbre en la demanda y en los costes. Fontini (2005) estudió el impacto de las actitudes optimista y pesimista en el modelo del oligopolio de Cournot bajo incertidumbre mediante la teoría de la utilidad esperada. En su análisis, cada empresa tiene incertidumbre sobre si las demás actuarán como competidores de Cournot. Además, cada una de ellas presenta una actitud ante el riesgo, ya sea pesimista u optimista. Caraballo et al. (2015) han estudiado el caso de un duopolio bajo incertidumbre en el que las funciones de demanda son lineales, caracterizando los equilibrios cuando las empresas tienen una actitud conservadora y cuando tienen una actitud optimista ante el riesgo. En lo que sigue se extiende este estudio al caso de funciones de demanda generales y a los casos en los que la actitud de los agentes es asimétrica. También se considera la posibilidad de que exista alguna información sobre las probabilidades de ocurrencia y se analiza el efecto de esta información sobre los equilibrios.

El resto del capítulo queda estructurado como sigue. En la siguiente sección se presenta el modelo general: un oligopolio en el que existen varios escenarios o estados de la naturaleza posibles de los que solamente uno de ellos tendrá lugar en la realidad, y sin información sobre las distribuciones de probabilidad de ocurrencia de dichos estados. A continuación, se determinan las funciones de mejor respuesta para las empresas conservadoras, optimistas y neutrales. Utilizando la extensión natural del concepto de equilibrio de Nash para un juego en forma normal con función de utilidad vectorial, caracterizamos el conjunto completo de equilibrios de Nash, dependiendo de la actitud ante el riesgo de las empresas, ya sea de aversión al riesgo, de propensión al mismo o una actitud neutral, así como el caso híbrido, en el que las empresas tiene un comportamiento distinto. Como caso particular, pero con ciertas peculiaridades, se considera un oligopolio con funciones de demanda inversa lineales. Finalmente, hacemos un análisis de los equilibrios cuando se dispone de información parcial sobre las probabilidades de ocurrencia.

4.2. Modelo de Cournot con incertidumbre en la demanda

El modelo general se centra en un oligopolio en el que n empresas producen un bien homogéneo. Las empresas compiten en el mercado y deben decidir las cantidades a producir, afrontando la incertidumbre sobre la posibilidad de ocurrencia de dos futuros escenarios $k, k = 1, 2$.

El precio del bien viene determinado por la función de demanda inversa. Para cada escenario $k, k = 1, 2$, lo denotamos por $P_k(Q)$, donde Q es la cantidad total del bien producida en el mercado, $Q = \sum_{j=1}^{n} q^j$. P_k es una función dos veces continuamente diferenciable, estrictamente decreciente, cóncava y no-negativa en un intervalo acotado $(0, Q_k)$, y $P_k(Q) = 0$ para $Q \geq Q_k$, como se supone en la literatura precedente (Kreps y Scheinkman, 1983).

Para plantear el juego asociado a este oligopolio, hay que definir quiénes son los agentes, las estrategias y las funciones de utilidad.

En este caso, los agentes son las n empresas, $N = \{1, ..., n\}$. El conjunto de estrategias de cada empresa, $A^i \subset \mathbb{R}_+, i \in N$, está acotado ya que cantidades extremadamente grandes de producto no son factibles y, por tanto, no están incluidas en el espacio de estrategias de la empresa.

La función de utilidad de cada agente viene dada por sus beneficios. Para simplificar el estudio, se supone que las empresas no tienen costes fijos y que sus costes marginales son nulos, y el precio de reserva es finito. Así, para $i \in N$, el beneficio de la empresa i en el escenario k es

$$u_k^i(q^i, q^{-i}) = q^i P_k(\sum_{j=1}^{n} q^j)$$

con $q^{-i} = (q^1, \ldots, q^{i-1}, q^{i+1}, \ldots, q^n)$.

De este modo, $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i \in N}\}$ representa el juego de Cournot bi-escenario.

Dada la acción de $n-1$ empresas, cada una en el intervalo $(0, Q_k)$, el beneficio de la otra alcanza su máximo cuando se anula la derivada, ya que, en cada escenario, la función de cada empresa es estrictamente cóncava en su propia acción. Se denota por $r_k^i(q^{-i})$, la función de respuesta de la empresa i ante la acción de las demás empresas, $-i$, en el escenario k, que está definida implícitamente por la siguiente ecuación para $q^j \in (0, Q_k), j \in N$

$$P_k(\sum_{j=1}^{n} q^j) + q^i \frac{\partial P_k}{\partial q^i}(\sum_{j=1}^{n} q^j) = 0.$$

Para $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} q^j > Q_k$, la función se define como $r_k^i(q^{-i}) = 0$. Dadas las hipótesis iniciales sobre las funciones de demanda inversa, las funciones de mejor respuesta de cada escenario, r_k^i, son no crecientes, estrictamente decrecientes en un intervalo acotado y continuamente diferenciables. Además, estas hipótesis garantizan la existencia de un único equilibrio de Cournot en cada escenario.

4.3. Las funciones de mejor respuesta

De acuerdo con la actitud que cada empresa exhibe ante el riesgo, se consideran empresas conservadoras, que tienen aversión al riesgo; empresas optimistas, que tienen preferencia por el riesgo y empresas neutrales, con una actitud intermedia de las dos anteriores. Cada empresa tiene una representación de las preferencias acorde con dicha actitud, denominada función de valor v^i. Para la empresa conservadora esta representación es una estrategia maximin de las utilidades y una empresa optimista utiliza una representación maximax de las utilidades. Consideramos además una posición intermedia entre las dos actitudes extremas descritas, una empresa neutral, para la que se maximiza una suma ponderada de las utilidades de ambos escenarios con pesos iguales, es decir, una representación aditiva de las preferencias. Por tanto, la función de valor de las preferencias a maximizar depende de dicha actitud.

Para una empresa conservadora

$$v_c^i(q^i, q^{-i}) = \text{mín}\{u_1^i(q^i, q^{-i}), u_2^i(q^i, q^{-i})\}.$$

Para una empresa optimista

$$v_{op}^i(q^i, q^{-i}) = \text{máx}\{u_1^i(q^i, q^{-i}), u_2^i(q^i, q^{-i})\}.$$

Para una empresa neutral al riesgo

$$v_n^i(q^i, q^{-i}) = \frac{1}{2}(u_1^i(q^i, q^{-i}) + u_2^i(q^i, q^{-i})).$$

Nótese que estas valoraciones se corresponden con el caso utilitarista conservador con todos los pesos del poliedro Δ y además con el maximin neutral para empresas conservadoras, con el caso utilitarista optimista con todos los pesos posibles para empresas optimistas, y con el caso utilitarista neutral para empresas neutrales, descritos todos ellos en el Capítulo 2.

Con objeto de evitar casos triviales en los que la función de beneficios de un escenario sea claramente mayor que la del otro, suponemos que el precio de reserva en el primer escenario, $P_1(0)$, es mayor que en el segundo, $P_2(0)$, y que la cantidad de competencia perfecta del escenario 1 es menor que la del escenario 2.

Las funciones de demanda inversa se cortan en un único valor de Q, para valores positivos de $P_k(Q)$ y Q, dadas las hipótesis iniciales sobre las funciones de demanda. Sea $\bar{Q}$ el valor tal que $P_1(\bar{Q}) = P_2(\bar{Q})$. Se verifica que si Q es menor que $\bar{Q}$, el precio en el escenario 2 es menor que en el escenario 1, y al contrario, si Q es mayor que $\bar{Q}$, el precio en el escenario 2 es mayor que en el escenario 1.

El hiperplano $L = \{(q^1, ..., q^n) \in \mathbb{R}^n \, : \, \sum_{j=1}^n q^j = \bar{Q}\}$, que representa las cantidades de cada empresa que dan lugar a una cantidad total igual a $\bar{Q}$, juega un papel fundamental en este estudio. Divide el espacio de estrategias en dos regiones, $\underline{L} = \{(q^1, ..., q^n) \in \mathbb{R}^n \, : \, \sum_{j=1}^n q^j < \bar{Q}\}$, y $\bar{L} = \{(q^1, ..., q^n) \in \mathbb{R}^n \, : \, \sum_{j=1}^n q^j > \bar{Q}\}$, en las que se tiene la función de beneficios de uno u otro escenario: en $\underline{L}$ el beneficio del escenario 1 es el mayor, y en $\bar{L}$, el beneficio del escenario 2 es el mayor.

De este modo, la función de valor para una empresa i conservadora es

$$v_c^i(q^i, q^{-i}) = \begin{cases} u_2^i(q^i, q^{-i}) & \text{si } \sum_{j=1}^n q^j \leq \bar{Q} \\ u_1^i(q^i, q^{-i}) & \text{si } \sum_{j=1}^n q^j \geq \bar{Q} \end{cases}$$

Si la empresa i es optimista, entonces la función de valor es

$$v_{op}^i(q^i, q^{-i}) = \begin{cases} u_1^i(q^i, q^{-i}) & \text{si } \sum_{j=1}^n q^j \leq \bar{Q} \\ u_2^i(q^i, q^{-i}) & \text{si } \sum_{j=1}^n q^j \geq \bar{Q} \end{cases}$$

Para una empresa i neutral al riesgo, la función de valor es

$$v_n^i(q^i, q^{-i}) = \frac{1}{2}(u_1^i(q^i, q^{-i}) + u_2^i(q^i, q^{-i})).$$

Esta última función es continua y diferenciable en su dominio. Sin embargo, la función de valoración de la empresa conservadora es continua en el espacio de estrategias de los empresas, pero no es diferenciable en los puntos en los que $\sum_{j=1}^n q^j = \bar{Q}$, y para la empresa optimista, la función de valoración ni siquiera es continua.

Por otra parte, la posición relativa de L y las funciones de mejor respuesta de la empresa en cada escenario determinan una función de mejor respuesta definida a trozos, tanto para la empresa conservadora como para la empresa optimista. Las derivadas de estas funciones son mayores o iguales que -1, para $i, k = 1, 2$, y la pendiente de L es igual a -1, como demuestran Kreps y Scheinkman (1983). Por tanto, L corta a cada una de las funciones de mejor respuesta a lo más en una ocasión.

Suponemos que las funciones de demanda inversa de los escenarios son tales que $r_1^i(q^{-i}) \leq r_2^i(q^{-i})$ para todo $q^{-i} \in A^{-i},\ i \in N$. Esta no es una hipótesis muy restrictiva, ya que hay muchas funciones de demanda que lo cumplen, entre otras, las funciones de demanda lineales y las funciones de demanda cuadráticas.

4.3.1. Función de mejor respuesta de una empresa conservadora

Para una empresa conservadora, la función de mejor respuesta se denota R_c^i y coincide con la mejor respuesta en el escenario 1 si la cantidad total ofrecida cuando la empresa i reacciona con su mejor respuesta en el escenario 1 está en $\bar{L}$ y con la del escenario 2 si la cantidad total ofrecida cuando la empresa i reacciona con su mejor respuesta en el escenario 2 está en $\underline{L}$. En los restantes casos, la mejor respuesta de la empresa i es la cantidad $\bar{Q}$ menos lo que ofrecen las restantes empresas, es decir, $\bar{Q} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q^j$.

Lema 4.3.1. *Si la empresa i is conservadora, entonces la función de mejor respuesta, R_c^i, viene dada por*

$$R_c^i(q^{-i}) = \begin{cases} r_1^i(q^{-i}) & si \ \ \bar{Q} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q^j \leq r_1^i(q^{-i}) \leq r_2^i(q^{-i}) \\ \bar{Q} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q^j & si \ \ r_1^i(q^{-i}) \leq \bar{Q} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q^j \leq r_2^i(q^{-i}) \\ r_2^i(q^{-i}) & si \ \ r_1^i(q^{-i}) \leq r_2^i(q^{-i}) \leq \bar{Q} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q^j \end{cases}$$

Demostración. Para cada empresa, las funciones de beneficios de ambos escenarios, u_1 y u_2, son cóncavas en su propia acción. Cuando todas las empresas excepto i seleccionan una estrategia, q^{-i}, de modo que $\bar{Q} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q^j \leq r_1^i(q^{-i}) \leq r_2^i(q^{-i})$, entonces $(r_1^i(q^{-i}), q^{-i}) \in \bar{L}$ y $(r_2^i(q^{-i}), q^{-i}) \in \bar{L}$. Como en $\bar{L}$ la función de valor viene dada por los beneficios del escenario 1, $v_c = u_1$, entonces el agente conservador i elegirá como su mejor respuesta la mejor respuesta en el escenario 1, $r_1^i(q^{-i})$.

Análogamente, si q^{-i} es tal que $r_1^i(q^{-i}) \leq r_2^i(q^{-i}) \leq \bar{Q} - \sum_{j=1,j\neq i}^n q^j$, entonces $(r_1^i(q^{-i}), q^{-i}) \in \underline{L}$ y $(r_2^i(q^{-i}), q^{-i}) \in \underline{L}$. En $\underline{L}$ la función de valor es la función de beneficios del escenario 2, por tanto, $v_c = u_2$, y el agente conservador i elegirá $r_2^i(q^{-i})$ como su mejor respuesta .

Para q^{-i} tal que $r_1^i(q^{-i}) \leq \bar{Q} - \sum_{j=1,j\neq i}^n q^j \leq r_2^i(q^j)$, se verifica que $(r_1^i(q^{-i}), q^{-i}) \in \underline{L}$ y $(r_2^i(q^{-i}), q^{-i}) \in \bar{L}$. En $\underline{L}$, $v_c = u_2$. Si la empresa i elige una estrategia q^i tal que $(q^i, q^{-i}) \in \underline{L}$, como v_c aumenta con q^i, la empresa elegirá la mayor cantidad posible. Sin embargo, cuando $(q^i, q^{-i}) \in \bar{L}$, entonces $v_c = u_1$, y v_c disminuye cuando q^i aumenta. Como resultado, la mejor respuesta de una empresa conservadora i es elegir su estrategia de modo que $(q^i, q^{-i}) \in L$, es decir, $q^i = \bar{Q} - \sum_{j=1,j\neq i}^n q^j$. □

Por tanto, la función de mejor respuesta de una empresa conservadora i es una función continua definida a trozos y, puesto que las funciones de mejor respuesta de los escenarios se cortan con L en a lo más un valor de Q, entonces la función de mejor respuesta está formada por un número de trozos menor o igual que tres.

La Figura 4.1 es una ilustración de la función de mejor respuesta de una empresa conservadora para el caso de un duopolio.

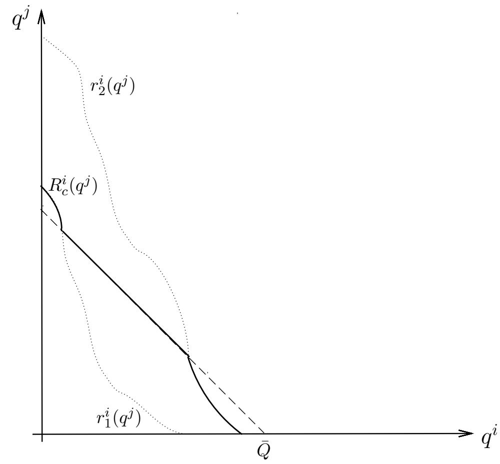


Figura 4.1. La función de mejor respuesta de una empresa conservadora.

4.3.2. Función de mejor respuesta de una empresa optimista

La función de mejor respuesta de una empresa optimista i se denota por R_{op}^i. El siguiente resultado establece que si la cantidad total ofrecida cuando la reacción del agente i a las estrategias q^{-i} es la del escenario 1 está en $\bar{L}$, entonces la reacción de una empresa optimista coincide con la función de mejor respuesta en el escenario

2. Análogamente, si la cantidad total ofrecida con la reacción de la empresa i en el escenario 2 está en $\underline{L}$, la reacción de la empresa optimista coincide con la función de mejor respuesta en el escenario 1.

Lema 4.3.2. *Si la empresa i es optimista, se verifica*

a) Si $\bar{Q} - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} q^j \leq r_1^i(q^{-i}) \leq r_2^i(q^{-i})$, *entonces* $R_{op}^i(q^{-i}) = r_2^i(q^j)$.

b) Si $\bar{Q} - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} q^j \geq r_2^i(q^{-i}) \geq r_1^i(q^{-i})$, *entonces* $R_{op}^i(q^{-i}) = r_1^i(q^{-i})$.

Demostración. Para la empresa i, dada una estrategia de las restantes empresas, q^{-i}, si tanto $(r_1^i(q^{-i}), q^{-i})$ como $(r_2^i(q^{-i}), q^{-i})$ pertenecen o bien a $\underline{L}$ o bien a $\bar{L}$, entonces el agente i seleccionará la mejor respuesta en el escenario que corresponde a la opción optimista en $\underline{L}$ o en $\bar{L}$, es decir, respectivamente, $r_1^i(q^{-i})$ o $r_2^i(q^{-i})$. □

Para valores de q^{-i} tales que $r_1^i(q^{-i}) \leq \bar{Q} - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} q^j \leq r_2^i(q^{-i})$, la mejor respuesta de la empresa i es o bien $r_1^i(q^{-i})$ o bien $r_2^i(q^{-i})$. Si coincide con la mejor respuesta en el escenario 1, $r_1^i(q^{-i})$, entonces el beneficio es $r_1^i(q^{-i})P_1(r_1^i(q^{-i}) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} q^j)$. Por el contrario, si es $r_2^i(q^{-i})$, el beneficio viene dado por la expresión $r_2^i(q^{-i})P_2(r_2^i(q^{-i})+\sum_{j=1,j\neq i}^{n} q^j)$. La mejor respuesta de una empresa optimista será la que le proporcione un beneficio mayor.

Los valores de q^{-i} para los que el beneficio obtenido en el escenario 1 con la mejor respuesta en el escenario 1 coincide con el beneficio en el escenario 2 con la mejor respuesta en el escenario 2 son los valores en los que la empresa cambia de una respuesta a la otra. Dichos valores son las soluciones de la ecuación $u_1^i(r_1^i(q^{-i}), q^{-i}) = u_2^i(r_2^i(q^{-i}), q^{-i})$, es decir

$$r_1^i(q^{-i})P_1(r_1^i(q^{-i}) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} q^j) = r_2^i(q^{-i})P_2(r_2^i(q^{-i}) + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} q^j) \qquad (4.3.1)$$

Si la función de respuesta de cada escenario depende de $\sum_{j=1,j\neq i}^{n} q^j$, sea S el conjunto de las soluciones positivas de esta ecuación para valores de $\sum_{j=1,j\neq i}^{n} q^j$, $S = \{s_t\}_{t=1,\ldots\bar{t}}$, estableciendo $s_0 = 0$, y $s_{\bar{t}+1} = +\infty$. Estas soluciones son los valores de $\sum_{j=1,j\neq i}^{n} q^j$ en los que la mejor respuesta optimista, R_{op}^i, cambia de la mejor respuesta en un escenario a la mejor respuesta del otro. Por tanto, son los posibles puntos de discontinuidad de la función R_{op}^i.

Para cada intervalo en el que $r_1^i(q^{-i}) \leq \bar{Q} - \sum_{j=1,j\neq i}^{n} q^j \leq r_2^i(q^{-i})$, hay al menos una solución de la Ecuación 4.3.1, $s_t \in S,\ t = 1, ..., \bar{t}$.

La mejor respuesta de una empresa optimista i, R^i_{op}, depende de las mejores respuestas en los dos escenarios cuando $q^{-i} = 0$. En el escenario k, $k = 1, 2$, la mejor respuesta de la empresa i cuando la estrategia de las demás es $q^{-i} = 0$ es la cantidad de monopolio q_{M_k}, y por tanto, $u^i_k(r^i_k(0), 0) = u^i_k(q_{M_k}, 0)$. El valor $u^i_k(q_{M_k}, 0)$ es el beneficio de monopolio en el escenario k, que es el máximo valor alcanzable.

La función de mejor respuesta de una empresa optimista se establece en el siguiente lema.

Lema 4.3.3. *Para empresas optimistas, la función de mejor respuesta, R^i_{op}, verifica*

a) Si $u^i_1(q_{M_1}, 0) > u^i_2(q_{M_2}, 0)$, entonces

$$R^i_{op}(q^{-i}) = \begin{cases} r^i_1(q^{-i}) & si \;\; s_t \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q^j < s_{t+1},\ con\ t\ par \\ r^i_2(q^{-i}) & si \;\; s_t \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q^j < s_{t+1},\ con\ t\ impar \end{cases}$$

b) Si $u^i_1(q_{M_1}, 0) < u^i_2(q_{M_2}, 0)$

$$R^i_{op}(q^{-i}) = \begin{cases} r^i_1(q^{-i}) & si \;\; s_t \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q^j < s_{t+1},\ con\ t\ impar \\ r^i_2(q^{-i}) & si \;\; s_t \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} q^j < s_{t+1},\ con\ t\ par \end{cases}$$

Demostración. Si $\bar{Q} \geq r^i_2(0) \geq r^i_1(0)$, por el Lema 4.3.2 se verifica que $R^i_{op}(0) = r^i_1(0)$, y se cumple el caso a) de este lema. Si $r^i_1(0) \leq \bar{Q} \leq r^i_2(0)$, entonces puede ocurrir el caso a) o b). □

La Figura 4.2 ilustra la mejor respuesta de una empresa optimista. Obsérvese que se trata de una función definida a trozos. En este caso, el resultado no garantiza la unicidad de solución de la Ecuación 4.3.1 en cada intervalo.

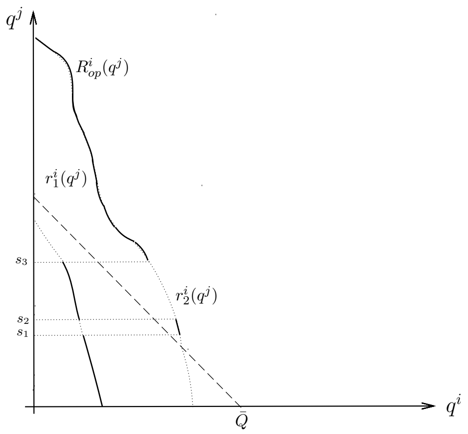


Figura 4.2. La función de mejor respuesta de una empresa optimista.

4.3.3. Función de mejor respuesta de una empresa neutral

En el caso en que la empresa sea neutral al riesgo, valora el beneficio obtenido en los dos escenarios en igual medida. Se denota por R_n^i la función de mejor respuesta de una empresa neutral.

Dadas las hipótesis iniciales, la función de una empresa neutral es diferenciable y estrictamente cóncava en su propia acción, y la correspondencia de mejor respuesta es estrictamente decreciente y continuamente diferenciable. Como establece el siguiente resultado, la mejor respuesta de una empresa neutral al riesgo siempre está en la región determinada por la mejor respuesta en ambos escenarios.

Lema 4.3.4. *Si la empresa i es neutral al riesgo, la función de mejor respuesta verifica $r_1^i(q^{-i}) \leq R_n^i(q^{-i}) \leq r_2^i(q^{-i})$ para todo $q^{-i} \in A^{-i}$, $i \in N$.*

Demostración. Se sigue del Lema 2.2.3. □

En la Figura 4.3 se ilustra la mejor respuesta de una empresa neutral.

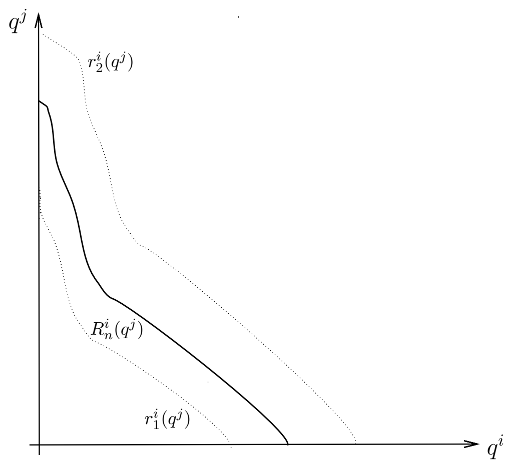


Figura 4.3. La función de mejor respuesta de una empresa neutral.

Ejemplo 4.3.5. Para determinar la función de mejor respuesta para empresas optimistas, conservadoras o neutrales, en primer lugar hay que calcular la mejor respuesta de la empresa i a las acciones de la empresa j en ambos escenarios.

Para ello, sea un juego de Cournot bi-escenario en el que las funciones de demanda inversa en los escenarios son cuadrática y lineal respectivamente, $P_1(Q) = a_1 - b_1Q^2$ y $P_2(Q) = a_2 - b_2Q$. Atendiendo a las hipótesis consideradas, los precios de reserva en cada escenario deben cumplir que $a_1 > a_2$, y los tamaños de mercados deben ser tales que $\sqrt{\frac{a_1}{b_1}} < \frac{a_2}{b_2}$.

La mejor respuesta de la empresa i a las acciones de la empresa j en el escenario 1 es

$$r_1^i(q^j) = -\frac{2}{3}q^j + \frac{1}{3}\sqrt{(q^j)^2 + 3\frac{a_1}{b_1}}.$$

En el escenario 2, la mejor respuesta de la empresa i a las acciones de la empresa j es

$$r_2^i(q^j) = \frac{a_2}{2b_2} - \frac{q^j}{2}.$$

En el caso particular en el que los parámetros de las funciones de demanda tomen un determinado valor, por ejemplo, $P_1(Q) = 20-20Q^2$ y $P_2(Q) = 3-Q$, tenemos que, para todo $q^j \in A^j,\ i,j = 1,2, i \neq j$, $r_1^i(q^j) = -\frac{2}{3}q^j + \frac{1}{3}\sqrt{(q^j)^2+3} \leq r_2^i(q^j) = \frac{3-q^j}{2}$.

El valor de la demanda total cuando las dos funciones de demanda inversa coinciden es $\bar{Q} = \frac{1+\sqrt{1361}}{40}$. Aplicando el Lema 4.3.1, si la empresa i es conservadora, entonces la función de mejor respuesta, R_c^i, viene dada por

$$R_c^i(q^j) = \begin{cases} -\frac{2}{3}q^j + \frac{1}{3}\sqrt{(q^j)^2+3} & \text{si} \quad \frac{71+31\sqrt{1361}}{1360} \leq q^j \\ \frac{1+\sqrt{1361}}{40} - q^j & \text{si} \quad q^j \leq \frac{71+31\sqrt{1361}}{1360} \end{cases}$$

Por otra parte, cuando la empresa i es optimista, el valor de s_1 para el que la empresa salta de la mejor respuesta de un escenario a la del otro, denotado por s^*, es aproximadamente 0,60. Las cantidades del monopolio son $q_{M_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $q_{M_2} = \frac{3}{2}$ y los beneficios son $u^1(q_{M_1}, 0) = \frac{40}{3\sqrt{3}} > u^2(q_{M_2}, 0) = \frac{9}{4}$. Por tanto, aplicando los Lemas 4.3.2 y 4.3.3, la función de mejor respuesta para la empresa optimista viene dada por la expresión

$$R_{op}^i(q^j) = \begin{cases} -\frac{2}{3}q^j + \frac{1}{3}\sqrt{(q^j)^2+3} & \text{si} \quad q^j \leq s^* \\ \frac{3-q^j}{2} & \text{si} \quad s^* \leq q^j \end{cases}$$

Finalmente, si la empresa i es neutral, la función de mejor respuesta, según el Lema 4.3.4, verifica

$$-\frac{2}{3}q^j + \frac{1}{3}\sqrt{(q^j)^2+3} \leq R_n^i(q^j) \leq \frac{a_2}{2b_2} - \frac{q^j}{2}.$$

Sabiendo que para una empresa neutral al riesgo, la función de valor es

$$v_n^i(q^i,q^j)=\frac{1}{2}(u_1^i(q^i,q^j)+u_2^i(q^i,q^j))=q^i\left(\frac{23}{2}-\frac{Q}{2}-10Q^2\right)$$

la función de mejor respuesta neutral viene dada por la expresión

$$\begin{array}{c}\frac{23}{2}-R_n^i(q^j)-\frac{q^j}{2}-30(R_n^i(q^j))^2-10(q^j)^2-40q^jR_n^i(q^j)q^j=0\\ R_n^i(q^j)=-\frac{1}{60}-\frac{2}{3}q^j+\frac{1}{60}\sqrt{400(q^j)^2+20q^j+1381}\end{array}$$

4.3.4. Funciones de mejor respuesta para funciones de demanda inversa lineales

Un caso muy frecuente en el estudio de un oligopolio de Cournot es el que considera funciones de demanda inversa lineales, debido a que las propiedades que verifican dichas funciones facilitan el análisis del problema. En esta línea, Caraballo et al. (2015) han realizado un estudio de un duopolio de Cournot bajo incertidumbre, con funciones de demanda inversa lineales.

En esta sección, generalizamos dicho estudio a un modelo de oligopolio en el que n empresas producen un bien homogéneo, compiten en un mismo mercado y se enfrentan a dos posibles escenarios futuros, con funciones de demanda inversa lineales en cada escenario k, $k=1,2$, $P_k(Q)=a_k-b_kQ$, con a_k, $b_k>0$, donde $Q=\sum_{j=1}^n q^j$.

Suponemos que $a_1>a_2$ y $\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}$, para evitar casos triviales en los que una de las funciones de beneficio de uno de los escenarios domine claramente a las del otro.

En cada uno de los dos escenarios, existe un equilibrio de Cournot,

$$(q_k^{1*},...,q_k^{n*})=(\frac{a_k}{(n+1)b_k},...,\frac{a_k}{(n+1)b_k}).$$

El juego al que se enfrentan las empresas es un juego en forma normal $G=\{(A^i,u^i)_{i\in N}\}$, donde A^i es el conjunto de estrategias que cada agente i puede tomar y u^i es su función de utilidad vectorial, $u^i:=(u_1^i(q^i,q^{-i}),u_2^i(q^i,q^{-i}))$.

En cada escenario, la función de beneficio de la empresa i es estrictamente cóncava con respecto a su acción

$$u_k^i(q^i,q^{-i})=q^i(a_k-b_k(\sum_{j=1}^n q^j)),i\in N.$$

En consecuencia, el beneficio del agente i, dada la acción de los $n-1$ agentes restantes, alcanza su máximo cuando se anula la derivada. La función de mejor respuesta del agente i a las acciones de los demás, q^{-i}, en el escenario k, $r_k^i : A^j \to \mathbb{R}$ es

$$r_k^i(q^{-i}) = \frac{a_k - b_k \sum_{j=1, j\neq i}^n q^j}{2b_k} = \frac{a_k}{2b_k} - \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^n q^j}{2}.$$

Como $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$, entonces $r_1^i(q^{-i}) < r_i^2(q^{-i})$.

El valor $\bar{Q}$ donde $P_1(Q) = P_2(Q)$, es decir, $a_1 - b_1 Q = a_2 - b_2 Q$, es $\bar{Q} = \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$.

Empresa conservadora

Aplicando el Lema 4.3.1, la función de mejor respuesta de una empresa conservadora, R_c^i, viene dada por

$$R_c^i(q^{-i}) = \begin{cases} \frac{a_1}{2b_1} - \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^n q^j}{2} & \text{si } \sum_{j=1, j\neq i}^n q^j \geq 2\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} - \frac{a_1}{b_1} \\ \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} - \sum_{j=1, j\neq i}^n q^j & \text{si } 2\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} - \frac{a_2}{b_2} \leq \sum_{j=1, j\neq i}^n q^j \leq 2\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} - \frac{a_1}{b_1} \\ \frac{a_2}{2b_2} - \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^n q^j}{2} & \text{si } \sum_{j=1, j\neq i}^n q^j \leq 2\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} - \frac{a_2}{b_2} \end{cases}$$

Empresa optimista

Los valores de q^{-i} para los que el beneficio obtenido en el escenario 1 con la mejor respuesta en el escenario 1 coincide con el beneficio en el escenario 2 con la mejor respuesta en el escenario 2 son los valores en los que la empresa cambia de una respuesta a la otra. Dichos valores s_t son las soluciones de la Ecuación 4.3.1. Es decir,

$$\begin{gathered}(\frac{a_1}{2b_1} - \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^n q^j}{2})(a_1 - b_1(\frac{a_1}{2b_1} - \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^n q^j}{2} + \sum_{j=1, j\neq i}^n q^j)) = \\ (\frac{a_2}{2b_2} - \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^n q^j}{2})(a_2 - b_2(\frac{a_2}{2b_2} - \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^n q^j}{2} + \sum_{j=1, j\neq i}^n q^j))\end{gathered}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones

$$\sum_{j=1, j\neq i}^n q^j = \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} - \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}} \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 - b_2}, \sum_{j=1, j\neq i}^n q^j = \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} + \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}} \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 - b_2}.$$

Pero una de ellas, la segunda, no entra dentro del dominio de definición de la función de mejor respuesta en el escenario k, ya que es mayor que $Q_k = \frac{a_k}{b_k}$, que corresponde al valor a partir del cual dicha función se anula.

Sabiendo que el monopolio de cada escenario es $q_{M_k} = \frac{a_k}{2b_k}$, $k = 1, 2$, según el Lema 4.3.3, la función de mejor respuesta de una empresa optimista, R_{op}^i, es

$$R^i_{op}(q^{-i}) = \begin{cases} \frac{a_1}{2b_1} - \frac{\sum_{j=1,j\neq i}^n q^j}{2} & \text{si } \sum_{j=1,j\neq i}^n q^j \leq \frac{a_1-a_2}{b_1-b_2} - \frac{1}{\sqrt{b_1b_2}}\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1-b_2} \\ \frac{a_2}{2b_2} - \frac{\sum_{j=1,j\neq i}^n q^j}{2} & \text{si } \frac{a_1-a_2}{b_1-b_2} - \frac{1}{\sqrt{b_1b_2}}\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1-b_2} < \sum_{j=1,j\neq i}^n q^j \end{cases}$$

Empresa neutral

En general, si la empresa i es neutral al riesgo, por el Lema 4.3.4, la función de mejor respuesta, R^i_n, verifica

$$r^i_1(q^{-i}) \leq R^i_n(q^{-i}) \leq r^i_2(q^{-i})$$

En este caso, al considerar como función de valor la semisuma de las funciones de beneficios de cada uno de los escenarios, $\frac{1}{2}q^i((a_1 + a_2 - (b_1 + b_2)(\sum_{j=1}^n q^j))$, la función de mejor respuesta es exactamente

$$R^i_n(q^{-i}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n q^j.$$

Ejemplo 4.3.6. Consideremos dos empresas y dos posibles escenarios descritos por las siguientes funciones de demanda inversa: $P_1(Q) = 32 - 50Q$ and $P_2(Q) = 1 - Q$.

Las mejores respuestas de la empresa i a las acciones de la empresa j en ambos escenarios verifican $r^i_1(q^j) = \frac{8}{25} - \frac{q^j}{2} \leq r^i_2(q^j) = \frac{1}{2} - \frac{q^j}{2}$.

Como $\bar{Q} = \frac{31}{49}$, entonces la función de mejor respuesta para una empresa conservadora, R^i_c, viene dada por

$$R^i_c(q^j) = \begin{cases} \frac{8}{25} - \frac{1}{2}q^j & \text{si } \frac{766}{1225} \leq q^j \\ \frac{31}{49} - q^j & \text{si } \frac{13}{49} \leq q^j \leq \frac{766}{1225} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}q^j & \text{si } q^j \leq \frac{13}{49} \end{cases}$$

Para describir la función de mejor respuesta cuando la empresa i es optimista, calculamos el valor para el que la empresa cambia de una de las mejores respuestas a la otra. En este ejemplo, es $s_1 = \frac{31}{49} - \frac{18}{245\sqrt{2}}$.

Por tanto, la función de mejor respuesta para la empresa optimista es

$$R^i_{op}(q^j) = \begin{cases} \frac{8}{25} - \frac{1}{2}q^j & \text{si } \frac{31}{49} - \frac{18}{245\sqrt{2}} \leq q^j \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}q^j & \text{si } q^j \leq \frac{31}{49} - \frac{18}{245\sqrt{2}} \end{cases}$$

Si la empresa i es neutral al riesgo, la función de mejor respuesta es

$$R^i_n(q^j) = \tfrac{33}{102} - \tfrac{1}{2}q^j.$$

4.4. Equilibrios para agentes simétricos

A continuación, se estudian los equilibrios de Nash, definidos en el Capítulo 2, para un oligopolio de Cournot en el caso de n empresas conservadoras, n empresas optimistas y n empresas neutrales.

4.4.1. Empresas conservadoras

En un equilibrio, las empresas conservadoras obtienen cantidades tales que ninguna desviación individual produce una mejora del beneficio mínimo. Por tanto, se define el equilibrio conservador como

Definición 4.4.1. (q^{*i}, q^{*-i}) es un equilibrio conservador para el juego de Cournot bi-escenario $G = \{(A^i, u^i_1, u^i_2)_{i\in N}\}$ si $\nexists i \in N$ con $q^i \in A^i$ tal que $v^i_c(q^i, q^{*-i}) > v^i_c(q^{*i}, q^{*-i})$.

$E_c(G)$ denota el conjunto de los equilibrios conservadores del juego de Cournot bi-escenario G. Estos equilibrios se corresponden con los equilibrios utilitaristas conservadores en el poliedro completo Δ y también con los maximin neutrales, que hemos analizado en el Capítulo 2.

Obsérvese que, de forma equivalente, un equilibrio conservador para el juego de Cournot bi-escenario G es un equilibrio para el juego estándar en forma normal, $G_c = \{(A^i, v^i_c)_{i\in N}\}$.

Como consecuencia de la concavidad de la función de valor conservadora, se asegura la existencia de los equilibrios conservadores bajo las hipótesis iniciales. Sin embargo, cuando no se verifica la concavidad estricta, puede haber múltiples equilibrios. El siguiente resultado caracteriza estos equilibrios en el caso general.

Denotemos por T la región

$$T = \{(q^1, ..., q^n) \, : \, r_1^i(q^{-i}) \leq q^i \leq r_2^i(q^{-i}), \, i \in N\}.$$

Por el Lema 2.2.4, sabemos que todos los equilibrios del juego de Cournot bi-escenario están contenidos en T.

Lema 4.4.2. *El conjunto de los equilibrios conservadores $E_c(G)$ está contenido en T.*

Demostración. Para demostrar que $E_c(G) \subseteq T$, supongamos que $(\bar{q}^i, \bar{q}^{-i}) \notin T$ es un equilibrio conservador. Si $\bar{q}^i < r_1^1(\bar{q}^{-i})$, como la función objetivo de cada empresa, u_k^i, es estrictamente cóncava en su propia acción, entonces ambos $u_1^1(q^i, \bar{q}^{-i})$ y $u_2^1(q^i, \bar{q}^{-i})$ son crecientes para $q^i \leq r_1^i(\bar{q}^{-i})$. Así, si el agente i se mueve a $\bar{q}^{-i} + \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{q}^{-i} + \varepsilon < r_1^1(\bar{q}^{-i})$, entonces su beneficio crece en ambos escenarios y, de este modo, v_c crece. Por tanto, $(\bar{q}^i, \bar{q}^{-i}) \notin E_c(G)$. Análogamente, se puede probar para $\bar{q}^i > r_2^1(\bar{q}^{-i})$, para $\bar{q}^{-i} < r_1^2(\bar{q}^i)$, y para $\bar{q}^{-i} > r_2^2(\bar{q}^i)$. $\square$

Para $k = 1, 2$, denotamos por $(c_k^*, ..., c_k^*)$ el equilibrio de Cournot en el escenario k. La existencia de este único equilibrio está asegurada por las hipótesis iniciales del modelo. Además, se verifica que $nc_1^* \leq \bar{Q} \leq nc_2^*$ si y sólo si $T \cap L \neq \{\emptyset\}$.

El siguiente resultado identifica los equilibrios conservadores.

Teorema 4.4.3. *El conjunto de los equilibrios conservadores del juego de Cournot bi-escenario $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i \in N}\}$ viene dado por*

a) Si $\bar{Q} \leq nc_1^*$, entonces $E_c(G) = \{(c_1^*, ..., c_1^*)\}$.

b) Si $nc_1^* < \bar{Q} < nc_2^*$ entonces $E_c(G) = T \cap L$.

c) Si $\bar{Q} \geq nc_2^*$, entonces $E_c(G) = \{(c_2^*, ..., c_2^*)\}$.

Demostración. Probamos, en primer lugar, que $T \cap L \subseteq E_c(G)$. Si $(q^i, q^{-i}) \in T \cap L$, entonces se verifica por el Lema 4.3.1 que $R_c^i(q^{-i}) = \bar{Q} - \sum_{j=1, j \neq i}^n q^j$. Como $(q^i, q^{-i}) \in L$, entonces $q^i = \bar{Q} - \sum_{j=1, j \neq i}^n q^j = R_c^i(q^{-i})$, es decir, q^i es la mejor respuesta a las estrategias de los otros agentes, q^{-i}. Por tanto, $(q^i, q^{-i}) \in E_c(G)$.

A continuación, probamos la otra inclusión, si $(q^i, q^{-i}) \in E_c(G)$, entonces o bien $(q^i, q^{-i}) \in T \cap L$ o (q^i, q^{-i}) coincide con el equilibrio de Cournot de uno de los dos escenarios.

Supongamos que $(q^i, q^{-i}) \in E_c(G)$ y $(q^i, q^{-i}) \in T \cap \underline{L}$. Consideramos, en primer lugar, los puntos interiores de T, $int(T)$. Sea $(q^i, q^{-i}) \in int(T) \cap \underline{L}$. Como $\underline{L}$ es un conjunto abierto y $q^i < r_2^i(q^{-i})$, para $\varepsilon > 0$, se tiene que $(q^i + \varepsilon, q^{-i}) \in int(T) \cap \underline{L}$. En $\underline{L}$, $v_c = u_2$, y como u_2 es cóncava en su propia acción, $v_c(q^i + \varepsilon, q^{-i}) > v_c(q^i, q^{-i})$, por lo que $(q^i, q^{-i}) \notin E_c(G)$. Un razonamiento análogo se realiza cuando $(q^i, q^{-i}) \in int(T) \cap \bar{L}$.

Los puntos en la frontera de T, ∂T, están localizados en las curvas de las funciones de mejor respuesta. Sea $(q^i, q^{-i}) \in \partial T \cap \underline{L}$. En $\underline{L}$, $v_c = u_2$, por tanto, para que (q^i, q^{-i}) sea un equilibrio conservador (q^i, q^{-i}) necesariamente ha de ser el equilibrio de Cournot en el escenario 2. Del mismo modo, cuando $(q^i, q^{-i}) \in \partial T \cap \bar{L}$, si (q^i, q^{-i}) es un equilibrio conservador, entonces este punto debe ser el equilibrio de Cournot en el escenario 1.

Casos a) y c): Si $\bar{Q} < nc_1^*$ entonces $(c_1^*, ..., c_1^*) \in \bar{L}$. Como para $(q^i, q^{-i}) \in \bar{L}$, $v_c = u_1$, entonces el equilibrio de Cournot en el escenario 1 es también un equilibrio conservador. Si $\bar{Q} = nc_1^*$, entonces $T \cap L = \{(c_1^*, ..., c_1^*)\}$ y se verifica que $E_c(G) = \{(c_1^*, ..., c_1^*)\}$. La demostración de c) es análoga.

Caso b) Si $nc_1^* < \bar{Q} < nc_2^*$ entonces $T \cap L \neq \{\emptyset\}$, y $T \cap L \subseteq E_c(G)$. Además, $(c_1^*, ..., c_1^*)$ no puede ser un equilibrio conservador, ya que en este caso $(c_1^*, ..., c_1^*) \in \underline{L}$, $v_c(c_1^*, ..., c_1^*) = u_2(c_1^*, ..., c_1^*)$, y por tanto los agentes pueden mejorar su función de valor conservadora adoptando una estrategia $q^i > c_1^*$. Análogamente, $(c_2^*, ..., c_2^*)$ no puede ser un equilibrio conservador, y se tiene el resultado. $\square$

Por tanto, si $nc_1^* \leq \bar{Q} \leq nc_2^*$, entonces los puntos de $T \cap L$ son los equilibrios conservadores. En todos estos puntos el precio asociado a las cantidades de equilibrio es el mismo con independencia del escenario que ocurra. Cuando $T \cap L = \{\emptyset\}$, el único equilibrio conservador existente coincide o bien con el equilibrio de Cournot de un escenario o del otro.

4.4.2. Empresas optimistas

El otro caso extremo en términos de la actitud ante el riesgo de las empresas es la situación en la que todas las empresas seleccionan sus estrategias teniendo en cuenta solamente los mejores resultados posibles. Por lo tanto, un equilibrio para las empresas optimistas proporciona cantidades tales que ninguna desviación individual hace mejorar el máximo beneficio.

Definición 4.4.4. (q^{*i}, q^{*-i}) es un equilibrio optimista para el juego de Cournot bi-escenario $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i\in N}\}$ si $\nexists i \in N$ con $q^i \in A^i$ tal que $v_{op}^i(q^i, q^{*-i}) > v_{op}^i(q^{*i}, q^{*-i})$.

Denotamos $E_{op}(G)$ el conjunto de equilibrios optimistas del juego G, que coinciden con los equilibrios utilitaristas optimistas en el poliedro completo Δ, definidos en el Capítulo 2.

Equivalentemente, un equilibrio optimista para el juego de Cournot bi-escenario G es un equilibrio para el juego estándar en forma normal, $G_{op} = \{(A^i, v_{op}^i)_{i\in N}\}$.

En esta situación, como las funciones de mejor respuesta de las empresas pueden ser discontinuas, no se puede asegurar la existencia de equilibrios. Sin embargo, Roberts y Sonnenschein (1976) probaron la existencia de un equilibrio de Cournot simétrico para n empresas idénticas cuando las discontinuidades de las funciones de mejor respuesta tienen la forma de "saltos ascendentes", es decir, si la función es continua por la derecha y superiormente semicontinua por la izquierda. Como consecuencia de ello, cuando sólo hay un cambio entre los escenarios, se asegura la existencia de equilibrio. Este es el caso de las funciones de demanda lineales, como se demuestra en Caraballo et al. (2015).

A continuación, establecemos condiciones para la existencia de equilibrios optimistas basadas en las relaciones entre las regiones T y L. En primer lugar, y al igual que en el caso de los equilibrios conservadores, el siguiente resultado demuestra que estos equilibrios están contenidos en la región T.

Lema 4.4.5. *El conjunto de los equilibrios optimistas $E_{op}(G)$ está contenido en T.*

Demostración. Supongamos lo contrario de lo que queremos demostrar, que $(\bar{q}^i, \bar{q}^{-i}) \notin T$ es un equilibrio optimista. Si $\bar{q}^i < r_1^1(\bar{q}^{-i})$, como la función objetivo de cada empresa, u_k^i, es estrictamente cóncava en su propia acción, entonces ambos $u_1^1(q^i, \bar{q}^{-i})$ y $u_2^1(q^i, \bar{q}^{-i})$ son crecientes para $q^i \leq r_1^i(\bar{q}^{-i})$. Así, si el agente i se mueve a $\bar{q}^{-i} + \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{q}^{-i} + \varepsilon < r_1^1(\bar{q}^{-i})$, entonces su beneficio crece en ambos escenarios y, de este modo, v_c crece. Por tanto, $(\bar{q}^i, \bar{q}^{-i}) \notin E_c(G)$. Análogamente, se puede probar para $\bar{q}^i > r_2^1(\bar{q}^{-i})$, para $\bar{q}^{-i} < r_1^2(\bar{q}^i)$, y para $\bar{q}^{-i} > r_2^2(\bar{q}^i)$. □

En contraste con el caso de la función de utilidad conservadora, la utilidad optimista, en general, no cumple las propiedades de concavidad. Este hecho aumenta la complejidad del estudio de la existencia y la identificación de los equilibrios.

Como las funciones de mejor respuesta de las empresas están formadas por trozos de las funciones de mejor respuesta en cada escenario, los posibles equilibrios optimistas son los puntos donde se cortan. Dada la simetría del modelo, estos puntos son necesariamente los equilibrios de Cournot en los dos escenarios. Este resultado se establece formalmente en el siguiente lema.

Lema 4.4.6. *Si* $(\bar{q}^i, \bar{q}^{-i}) \in E_{op}(G)$ *entonces* $(\bar{q}^i, \bar{q}^{-i}) = (c_1^*, ..., c_1^*)$ *o* $(\bar{q}^i, \bar{q}^{-i}) = (c_2^*, ..., c_2^*)$.

Aunque no se puede asegurar la existencia ni la unicidad de equilibrios optimistas, el siguiente resultado establece que, cuando los equilibrios de Cournot de ambos escenarios se encuentran en la misma región de las dos que define L, entonces el equilibrio optimista coincide con uno de dichos equilibrios.

Lema 4.4.7. *Sea* $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i=1,...,n}\}$ *un juego de Cournot bi-escenario*

a) Si $\bar{Q} < nc_1^*$, *entonces* $E_{op}(G) = \{(c_2^*, ..., c_2^*)\}$.

b) Si $\bar{Q} > nc_2^*$, *entonces* $E_{op}(G) = \{(c_1^*, ..., c_1^*)\}$.

Demostración. a) Si $\bar{Q} < nc_1^*$, entonces $\{(c_2^*, ..., c_2^*)\}$ es el equilibrio optimista porque en esa región el máximo beneficio se alcanza en el escenario 2.

b) Análogamente, se verifica que si $\bar{Q} > nc_2^*$, $\{(c_1^*, ..., c_1^*)\}$ es el equilibrio optimista. □

El siguiente teorema caracteriza el equilibrio optimista. Sea q_{M_k} la cantidad de monopolio en el escenario $k, k = 1, 2$.

Teorema 4.4.8. *Para el juego de Cournot bi-escenario* $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i=1,...,n}\}$, *se cumple*

a) Si $u_1^i(q_{M_1}, 0) > u_2^i(q_{M_2}, 0)$,

$(c_1^*, ..., c_1^*) \in E_{op}(G)$ *si y sólo si* $s_t \leq (n-1)c_1^* \leq s_{t+1}$ *con* t *par.*

$(c_2^*, ..., c_2^*) \in E_{op}(G)$ *si y sólo si* $s_t \leq (n-1)c_2^* \leq s_{t+1}$ *con* t *impar.*

b) Si $u_1^i(q_{M_1}, 0) < u_2^i(q_{M_2}, 0)$,

$(c_1^*, ..., c_1^*) \in E_{op}(G)$ *si y sólo si* $s_t \leq (n-1)c_1^* \leq s_{t+1}$ *con* t *impar.*

$(c_2^*, ..., c_2^*) \in E_{op}(G)$ *si y sólo si* $s_t \leq (n-1)c_2^* \leq s_{t+1}$ *con* t *par.*

Demostración. El resultado se deduce de los Lemas 4.3.3 y 4.4.6 . □

En relación con los equilibrios optimistas del juego de Cournot bajo incertidumbre, se tiene siempre una de estas cuatro situaciones: no existe equilibrio optimista, el equilibrio de Cournot para el primer escenario es el equilibrio optimista; el equilibrio de Cournot para el segundo escenario es el equilibrio optimista; o ambos son equilibrios optimistas.

4.4.3. Empresas neutrales

Las empresas neutrales al riesgo constituyen una situación intermedia con respecto a los casos extremos establecidos anteriormente. Estas empresas deciden sus estrategias atendiendo al mejor resultado medio posible entre ambos escenarios. De este modo, en un equilibrio para empresas neutrales, ninguna desviación individual hace mejorar el beneficio medio entre los dos escenarios.

Definición 4.4.9. (q^{*i}, q^{*-i}) es un equilibrio neutral para el juego de Cournot bi-escenario $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i\in N}\}$ si $\nexists i \in N$ con $q^i \in A^i$ tal que $v_n^i(q^i, q^{*-i}) > v_n^i(q^{*i}, q^{*-i})$.

Denotamos $E_n(G)$ el conjunto de equilibrios neutrales del juego G, que coinciden con los que hemos denominado equilibrios utilitaristas neutrales en el Capítulo 2.

De forma equivalente, un equilibrio neutral para el juego de Cournot bi-escenario G es un equilibrio para el juego estándar en forma normal $G_n = \{(A^i, v_n^i)_{i=1,\dots,n}\}$.

Al igual que en los dos casos anteriores, se puede demostrar que el conjunto de equilibrios de una empresa neutral está contenido en el conjunto T. Más concretamente, y como consecuencia de las hipótesis iniciales de las funciones de demanda inversa en los diferentes escenarios y la función de mejor respuesta de una empresa neutral, se establece el siguiente resultado.

Teorema 4.4.10. *Para el juego de Cournot bi-escenario* $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i\in N}\}$, *existe un único equilibrio neutral,* $(c_n^*, \dots, c_n^*)$ *tal que* $c_1^* \leq c_n^* \leq c_2^*$.

Demostración. La existencia y unicidad de equilibrio se deduce de la concavidad de la función v_n^i. Por la proposición 2.2.4 y, teniendo en cuenta la relación entre R_n^i y las funciones de mejor respuesta de cada escenario, se sigue el resultado. □

Ejemplo 4.4.11. Consideremos el duopolio del Ejemplo 4.3.5. Teniendo en cuenta la función de mejor respuesta R_c^i, el valor de $\bar{Q} = \frac{1+\sqrt{1361}}{40}$, y que los equilibrios de Cournot son $(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ y $(1,1)$ para los escenarios 1 y 2 respectivamente, utilizando el Teorema 4.4.3 b), el conjunto de equilibrios conservadores es

$$E_c(G) = \{(q^1, q^2) \,:\, q^1 + q^2 = \bar{Q} = \tfrac{1+\sqrt{1361}}{40},\ \tfrac{3\sqrt{1361}-37}{1360} \leq q^1 \leq \tfrac{71+31\sqrt{1361}}{1360}\}.$$

Es interesante destacar que el precio asociado a todas las cantidades de equilibrio, $\frac{119-\sqrt{1361}}{40}$, es único. Además, el conjunto de equilibrios es simétrico, es decir, si $(q^1, q^2) \in E_c(G)$, también $(q^2, q^1) \in E_c(G)$. Por último, cada uno de los equilibrios proporciona el mismo beneficio en los dos escenarios.

Para obtener los equilibrios del modelo del duopolio cuando las empresas son optimistas, recordemos que el valor de s_1, s^*, es aproximadamente 0.60. Los beneficios de las cantidades de monopolio son $u_1(q_{M_1}, 0) = \frac{40}{3\sqrt{3}}$ y $u_2(q_{M_2}, 0) = \frac{9}{4}$. De acuerdo con el Teorema 4.4.8 a), los equilibrios de Cournot son ambos equilibrios optimistas, es decir,

$$E_{op}(G) = \{(\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2\sqrt{2}}), (1,1)\}.$$

Cuando las empresas son neutrales, de acuerdo con el Teorema 4.4.10, existe un único equilibrio neutral (c_n^*, c_n^*) tal que $\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq c_n^* \leq 1$, y es

$$E_n(G) = \{(\tfrac{-3+\sqrt{14729}}{320}, \tfrac{-3+\sqrt{14729}}{320}\} = \{0{,}369884, 0{,}369884\}.$$

4.4.4. Equilibrios para agentes simétricos y funciones de demanda inversa lineales

El conjunto de todos los equilibrios de Nash del juego de Cournot bajo incertidumbre, G, para funciones de demanda inversa lineales, está acotado por las curvas de las mejores respuestas de cada agente a la acción de los restantes en cada escenario, como se establece en el Teorema 2.2.4.

$$E(G) = \{(q^1, ..., q^n) \,:\, r_1^i(q^{-i}) \leq q^i \leq r_2^i(q^{-i})\}.$$

La linealidad de las funciones de mejor respuesta permite representar el conjunto de equilibrios como la envolvente convexa de sus puntos extremos, como demuestran Caraballo et al. (2015).

Equilibrios conservadores

Sabiendo que el equilibrio de Cournot del escenario k es $(\frac{a_k}{(n+1)b_k}, ..., \frac{a_k}{(n+1)b_k})$, y que $\bar{Q} = \frac{a_1-a_2}{b_1-b_2}$, con $a_1 > a_2$, por el Teorema 4.4.3, el conjunto de los equilibrios conservadores del juego con función de demanda inversa lineal viene dado por la expresión

a) Si $\frac{a_1-a_2}{b_1-b_2} \leq \frac{na_1}{(n+1)b_1}$, entonces $E_c(G) = \{(\frac{a_1}{(n+1)b_1}, ..., \frac{a_1}{(n+1)b_1})\}$.

b) Si $\frac{na_1}{(n+1)b_1} < \frac{a_1-a_2}{b_1-b_2} < \frac{na_2}{(n+1)b_2}$ $E_c(G) = T \cap \{(q^1, ..., q^n) : \sum_{j=1}^{n} q^j = \frac{a_1-a_2}{b_1-b_2}\}$.

c) Si $\frac{a_1-a_2}{b_1-b_2} \geq \frac{na_2}{(n+1)b_2}$, entonces $E_c(G) = \{(\frac{a_2}{(n+1)b_2}, ..., \frac{a_2}{(n+1)b_2})\}$.

En el caso en que exista multiplicidad de equilibrios, todos los equilibrios corresponden al mismo precio: $\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1-b_2}$.

Equilibrios optimistas

El equilibrio de Cournot del escenario k es $(\frac{a_k}{(n+1)b_k}, ..., \frac{a_k}{(n+1)b_k})$, la cantidad de monopolio en el escenario k es $q_{M_k} = \frac{a_k}{2b_k}, k = 1, 2$. Como $u_1^i(q_{M_1}, 0) = \frac{a_1}{2b_1}q^i < u_2^i(q_{M_2}, 0) = \frac{a_2}{2b_2}q^i$, por el Teorema 4.4.8 b), los equilibrios optimistas, para una función de demanda inversa lineal, son

a) Si $\frac{a_1-a_2}{b_1-b_2} - \frac{1}{\sqrt{b_1b_2}}\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1-b_2} < \frac{a_1}{(n+1)b_1}$, entonces $E_{op}(G) = \{(\frac{a_2}{(n+1)b_2}, ..., \frac{a_2}{(n+1)b_2})\}$.

b) Si $\frac{a_1}{(n+1)b_1} \leq \frac{a_1-a_2}{b_1-b_2} - \frac{1}{\sqrt{b_1b_2}}\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1-b_2} \leq \frac{a_2}{(n+1)b_2}$, entonces

$$E_{op}(G) = \{(\frac{a_1}{(n+1)b_1}, ..., \frac{a_1}{(n+1)b_1}), (\frac{a_2}{(n+1)b_2}, ..., \frac{a_2}{(n+1)b_2})\}.$$

c) Si $\frac{a_1-a_2}{b_1-b_2} - \frac{1}{\sqrt{b_1b_2}}\frac{a_2b_1-a_1b_2}{b_1-b_2} > \frac{a_2}{(n+1)b_2}$, entonces $E_{op}(G) = \{(\frac{a_1}{(n+1)b_1}, ..., \frac{a_1}{(n+1)b_1})\}$.

Para funciones de demanda inversa lineales, siempre existe equilibrio optimista, tal como se ha comentado anteriormente, y puede ser el equilibrio de uno de los dos escenarios o bien ambos equilibrios.

Equilibrios neutrales

Dada una función de demanda inversa lineal $P(Q) = a - bQ$, el equilibrio de Cournot es $(\frac{a}{(n+1)b}, ..., \frac{a}{(n+1)b})$. Como la función de demanda inversa en el caso neutral es $P(Q) = \frac{a_1+a_2}{2} - \frac{b_1+b_2}{2}Q$, el único equilibrio neutral es

$$E_n(G) = (\frac{a_1 + a_2}{(n + 1)(b_1 + b_2)}, ..., \frac{a_1 + a_2}{(n + 1)(b_1 + b_2)}).$$

Ejemplo 4.4.12. Para el Ejemplo 4.3.6, el conjunto de los equilibrios, según el Teorema 2.2.4, es el representado en la Figura 4.4, que coincide con la envolvente convexa de cuatro puntos extremos: los equilibrios de Cournot en ambos escenarios ($(\frac{16}{75}, \frac{16}{75})$ y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$) y los puntos de corte de las funciones de mejor respuesta de cada empresa en escenarios distintos.

$$E(G) = con\{(\tfrac{16}{75}, \tfrac{16}{75}), (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}), (\tfrac{7}{75}, \tfrac{34}{75}), (\tfrac{34}{75}, \tfrac{7}{75})\}.$$

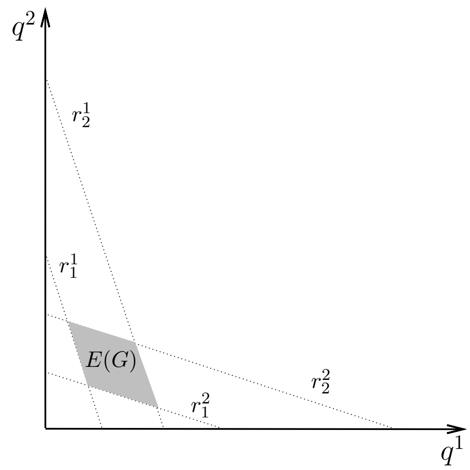


Figura 4.4. Conjunto de equilibrios para una función de demanda inversa lineal.

El conjunto de equilibrios conservadores es

$$E_c(G) = T \cap \{(q^1, q^2) : q^1 + q^2 = \tfrac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}\} = \{(q^1, q^2) : q^1 + q^2 = \tfrac{31}{49}, \tfrac{13}{49} \leq q^1 \leq \tfrac{18}{49}\}.$$

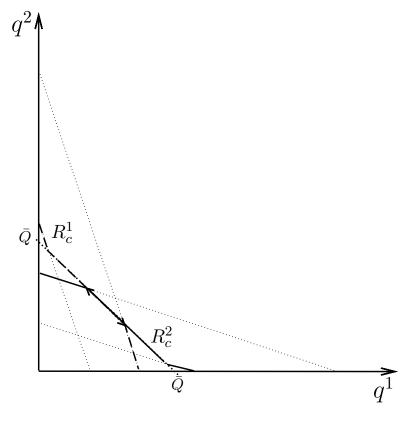


Figura 4.5. Equilibrios conservadores para una función de demanda inversa lineal.

En todos los equilibrios, representados en la Figura 4.5, el precio correspondiente es $\frac{18}{49}$.

Como los equilibrios de Cournot de ambos escenarios son $(c_1^*, c_1^*) = (\frac{16}{75}, \frac{16}{75})$ y $(c_2^*, c_2^*) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $s_1 = \frac{31}{49} - \frac{18}{245\sqrt{2}}$ y los beneficios en las cantidades de monopolio verifican $u_1^i(q_{M_1}, 0) = \frac{128}{25} > u_2^i(q_{M_2}, 0) = \frac{1}{4}$, el único equilibrio optimista, que aparece en la Figura 4.6, coincide con el equilibrio de Cournot del primer escenario

$$E_{op}(G) = \{(\tfrac{16}{75}, \tfrac{16}{75})\}.$$

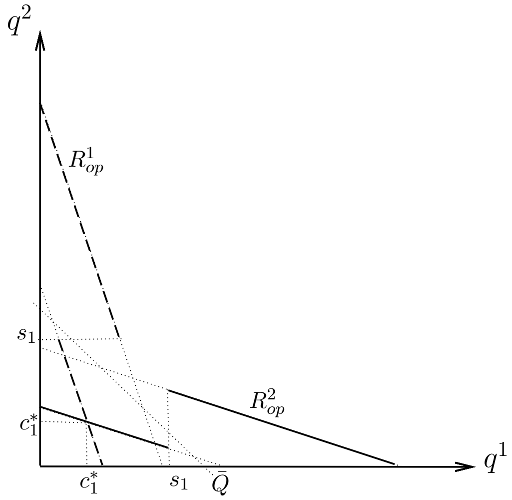


Figura 4.6. Equilibrio optimista para una función de demanda inversa lineal.

El equilibrio neutral, que aparece en la Figura 4.7, siempre existe y es único

$$E_n(G) = \{(\tfrac{11}{51}, \tfrac{11}{51})\}.$$

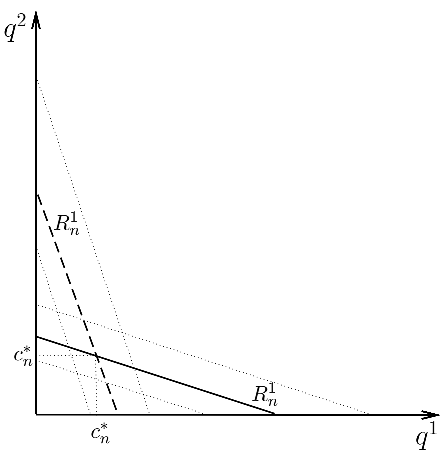


Figura 4.7. Equilibrio neutral para una función de demanda inversa lineal.

4.5. Equilibrios híbridos

Cuando las empresas muestran una actitud diferente ante el riesgo, el equilibrio que alcanzan, si existe, se denomina equilibrio híbrido. En general, habría k_1 empresas neutrales, k_2 empresas conservadoras, y k_3 empresas optimistas, con $k_1 + k_2 + k_3 = n$. Para facilitar la notación, a continuación se establecen los equilibrios en un modelo de duopolio. Estudiaremos los tres posibles casos que se presentan para un duopolio: una empresa es neutral y la otra es conservadora, una empresa es neutral y la otra es optimista, o bien una empresa es conservadora, y la otra es optimista.

4.5.1. Empresa neutral versus empresa conservadora

En primer lugar, analizamos el caso en el que la empresa 1 es neutral y la empresa 2 es conservadora.

Definición 4.5.1. (q^{*1}, q^{*2}) es un equilibro híbrido neutral-conservador para el juego de Cournot $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i=1,2}\}$ si para cada $q^1 \in A^1$ se tiene $v_n^1(q^1, q^{*2}) \leq v_n^1(q^{*1}, q^{*2})$ y para cada $q^2 \in A^2$ se cumple $v_c^2(q^{*1}, q^2) \leq v_c^2(q^{*1}, q^{*2})$.

Denotamos por $E_{n,c}(G)$ el conjunto de equilibrios híbridos neutral-conservador del juego G.

Sea (z_k^{*1}, z_k^{*2}), $k = 1, 2$, la intersección de la mejor respuesta de la empresa 1, R_n^1, y la mejor respuesta de la empresa 2 en el escenario k, r_k^2. Y sean $(\bar{z}^1, \bar{z}^2)$, la intersección de la mejor respuesta neutral R_n^2, y L.

Teorema 4.5.2. *Para el juego de Cournot bi-escenario $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i=1,2}\}$, donde la empresa 1 es neutral y la empresa 2 es conservadora, siempre existe equilibrio y es único. Además,*

a) $E_{n,c}(G) = \{(z_1^{*1}, z_1^{*2})\}$ *si y sólo si* $\bar{Q} \leq z_1^{*1} + z_1^{*2}$.

b) $E_{n,c}(G) = \{(z_2^{*1}, z_2^{*2})\}$ *si y sólo si* $\bar{Q} \geq z_2^{*1} + z_2^{*2}$.

c) $E_{n,c}(G) = \{(\bar{z}^1, \bar{z}^2)\}$ *si y sólo si* $z_2^{*1} + z_2^{*2} \leq \bar{Q} \leq z_1^{*1} + z_1^{*2}$.

Demostración. La existencia de equilibrio se deduce del hecho de que las funciones de utilidad de la empresa neutral y de la empresa conservadora son cóncavas en su propia acción.

Si $\bar{Q} \geq z_2^{*1} + z_2^{*2}$, por el Lema 4.3.1, $R_c^2(z_2^{*1}) = r_2^2(z_2^{*1}) = z_2^{*2}$, por lo que (z_2^{*1}, z_2^{*2}) es un equilibrio. Recíprocamente, si (z_2^{*1}, z_2^{*2}) es un equilibrio, entonces $R_c^2(z_2^{*1}) = r_2^2(z_2^{*1})$ y, por el Lema 4.3.1, $\bar{Q} \geq z_2^{*1} + z_2^{*2}$.

Para probar la unicidad, nótese que la función de mejor respuesta de una empresa neutral es estrictamente decreciente y continuamente diferenciable y su derivada verifica $(R_n^1)'(q^2) > -1$ en el intervalo donde toma valores positivos. Además, la función de mejor respuesta de una empresa conservadora es una función a trozos, estrictamente decreciente, continua y diferenciable, excepto a lo más en dos puntos. Cuando es diferenciable, también verifica $(R_c^1)'(q^1) \geq -1$.

Sea $\bar{Z}_2 = z_2^{*1} + z_2^{*2}$. Como $(R_n^1)'(q^2) > -1$, para todos los puntos de la curva, $(R_n^1(q^2), q^2)$ con $q^2 < z_2^{*2}$, se tiene que $R_n^1(q^2) + q^2 < \bar{Z}_2$. Si las curvas de las funciones de mejor respuesta, R_n^1 y R_c^2, se cortan en otro punto (q^1, q^2), entonces se tiene que $q^2 = R_c^2(q^1) = \bar{Q} - q^1$ o $q^2 = R_c^2(q^1) = r_1^2(q^1)$. En ambos casos, usando el Lema 4.3.1, $q^1 + q^2 \geq \bar{Q} \geq \bar{Z}_2$, lo que contradice que $R_n^1(q^2) + q^2 < \bar{Z}_2$.

Los casos b) and c) se prueban usando un razonamiento análogo. □

4.5.2. Empresa neutral versus empresa optimista

El segundo tipo de equilibrio híbrido analizado es el caso en que la empresa 1 es neutral y la empresa 2 es optimista.

Definición 4.5.3. (q^{*1}, q^{*2}) es un equilibro híbrido neutral-optimista para el juego de Cournot $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i=1,2}\}$ si para cada $q^1 \in A^1$ se tiene $v_n^1(q^1, q^{*2}) \leq v_n^1(q^{*1}, q^{*2})$ y para cada $q^2 \in A^2$ se cumple $v_{op}^2(q^{*1}, q^2) \leq v_{op}^2(q^{*1}, q^{*2})$.

Denotamos por $E_{n,op}(G)$ el conjunto de equilibrios híbridos neutral-optimista del juego G.

De forma similar al caso de empresas optimistas, en general, no está asegurada la existencia de equilibrios híbridos. Sin embargo, bajo las hipótesis del modelo, si existe equilibrio, es único.

A continuación, se establecen las condiciones para su existencia así como un procedimiento para su determinación.

Lema 4.5.4. *Para el juego de Cournot bi-escenario $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i=1,2}\}$, donde la empresa 1 es neutral y la empresa 2 es optimista, existe a lo más un equilibrio.*

Además,

$$E_{n,op}(G) \subseteq \{(z_1^{*1}, z_1^{*2}), (z_2^{*1}, z_2^{*2})\}.$$

Demostración. Se sigue del Lema 4.3.2 y de la definición de los puntos (z_1^{*1}, z_1^{*2}) y (z_2^{*1}, z_2^{*2}). □

El siguiente resultado, que analiza la existencia de estos equilibrios híbridos, se obtiene con un razonamiento similar al seguido en el Teorema 4.5.2.

Teorema 4.5.5. *El conjunto de equilibrios híbridos neutral-optimista para el juego de Cournot bi-escenario $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i=1,2}\}$ es*

a) $(z_1^{*1}, z_2^{*2}) \in E_{n,op}(G)$ *si y sólo si se verifica a1) o a2)*

- *a1)* $u^1(q_{M_1}, 0) < u^2(q_{M_2}, 0)$, *y* $s_t \leq z_1^{*1} \leq s_{t+1}$ *con* t *impar.*
- *a2)* $u^1(q_{M_1}, 0) > u^2(q_{M_2}, 0)$, *y* $s_t \leq z_1^{*1} \leq s_{t+1}$ *con* t *par.*

b) $(z_2^{*1}, z_2^{*2}) \in E_{n,op}(G)$ *si y sólo si se cumple b1) o b2)*

- *b1)* $u^1(q_{M_1}, 0) < u^2(q_{M_2}, 0)$, *y* $s_t \leq z_2^{*1} \leq s_{t+1}$ *con* t *par.*
- *b2)* $u^1(q_{M_1}, 0) > u^2(q_{M_2}, 0)$, *y* $s_t \leq z_2^{*1} \leq s_{t+1}$ *con* t *impar.*

4.5.3. Empresa conservadora versus empresa optimista

Finalmente, para determinar el equilibrio híbrido conservador-optimista consideramos, sin pérdida de generalidad, que la empresa 1 es conservadora y la empresa 2 es optimista.

Definición 4.5.6. (q^{*1}, q^{*2}) es un equilibro híbrido conservador-optimista para el juego de Cournot $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i=1,2}\}$ si para cada $q^1 \in A^1$ se tiene $v_c^1(q^1, q^{*2}) \leq v_c^1(q^{*1}, q^{*2})$ y para cada $q^2 \in A^2$ se cumple $v_{op}^2(q^{*1}, q^2) \leq v_{op}^2(q^{*1}, q^{*2})$.

Denotamos por $E_{c,op}(G)$ el conjunto de equilibrios híbridos conservador-optimista del juego G.

En este caso, en general, puede no existir equilibrio híbrido. A continuación, establecemos las condiciones para su existencia.

Sea (d_1^*, d_2^*) el punto de intersección de las curvas de la mejor respuesta de la empresa 1 en el escenario 1, r_1^1, y la mejor respuesta de la empresa 2 en el escenario 2, r_2^2. Dado que las funciones de demanda inversa son idénticas en cada escenario,

(d_2^*, d_1^*) denota el punto de intersección de las curvas de la mejor respuesta de la empresa 1 en el escenario 2, r_2^1, y la mejor respuesta de la empresa 2 en el escenario 1, r_1^2. Sean además los puntos de discontinuidad de la función de mejor respuesta de la empresa optimista $(s_t, R_{op}(s_t))$, $t = 0, 1, \dots \bar{t}$. El siguiente resultado establece que si existe equilibrio, está entre estos puntos.

Lema 4.5.7. *Para el juego de Cournot bi-escenario* $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i=1,2}\}$, *donde la empresa* 1 *es conservadora y la empresa* 2 *es optimista, se verifica*

$$E_{c,op}(G) \subset \{(d_1^*, d_2^*), (d_2^*, d_1^*), (s_t^1, R_{op}(s_t^1))\},\ t = 0, 1, \dots \bar{t}.$$

Demostración. Si existe un equilibrio híbrido en $\bar{L}$, las funciones de mejor respuesta se cortan en $\bar{L}$. De los Lemas 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3, se tiene que en $\bar{L}$, la función de mejor respuesta conservadora es r_1^1 y la optimista es r_2^2, y por ello, solamente (d_1^*, d_2^*) puede ser un equilibrio. Análogo razonamiento se aplica para $\underline{L}$, y en este caso, el único equilibrio puede ser (d_2^*, d_1^*). Por otra parte, si existe un equilibrio híbrido en L, por los lemas anteriormente mencionados, la función de mejor respuesta conservadora es $\bar{Q} - q^2$, y la optimista es r_1^2 o r_2^2. Por tanto, sólo puede existir un equilibrio en L si $\bar{Q} - q^2 = s_t$, con s_t una discontinuidad de la función de mejor respuesta optimista R_{op}^2. □

En el siguiente resultado se identifican los diferentes casos de equilibrios híbridos.

Teorema 4.5.8. *Para el juego de Cournot bi-escenario,* $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i=1,2}\}$, *si la empresa* 1 *es conservadora y la empresa* 2 *es optimista, entonces*

a) $(s_t, R_{op}(s_t^1)) \in E_{c,op}(G)$ *si y sólo si* $\bar{Q} = s_t + R_{op}(s_t)$.

b) $(d_1^*, d_2^*) \in E_{c,op}(G)$ *si y sólo si se verifica b1) o b2)*

- *b1)* $\bar{Q} \leq d_1^* + d_2^*$, $u_1(q_{M_1}, 0) < u_2(q_{M_2}, 0)$ *y* $s_t \leq d_1^* \leq s_{t+1}$ *para algún* t *par.*
- *b2)* $\bar{Q} \leq d_1^* + d_2^*$, $u_1(q_{M_1}, 0) > u_2(q_{M_2}, 0)$ *y* $s_t \leq d_1^* \leq s_{t+1}$ *para algún* t *impar.*

c) $(d_2^*, d_1^*) \in E_{c,op}(G)$ *si y sólo si se verifica c1) o c2)*

- *c1)* $\bar{Q} \geq d_1^* + d_2^*$, $u_1(q_{M_1}, 0) < u_2(q_{M_2}, 0)$ *y* $s_t \leq d_2^* \leq s_{t+1}$ *para algún* t *impar.*
- *c2)* $\bar{Q} \geq d_1^* + d_2^*$, $u_1(q_{M_1}, 0) > u_2(q_{M_2}, 0)$ *y* $s_t \leq d_2^* \leq s_{t+1}$ *para algún* t *par.*

Demostración. La demostración es análoga a la del Teorema 4.5.2. □

Observación 4.5.9. Nótese que si $\bar{Q} = d_1^* + d_2^*$, puede ocurrir que (d_1^*, d_2^*) o (d_2^*, d_1^*) sea equilibrio. Entonces d_1^* o d_2^* coincide con una de las discontinuidades de las funciones de mejor respuesta, es decir, si los equilibrios están en L coinciden con el caso a).

4.5.4. Equilibrios híbridos para funciones de demanda inversa lineales

Este caso particular es muy interesante puesto que, cuando una de las empresas es optimista, se garantiza que si existe equilibrio híbrido, es único. Además, estos equilibrios híbridos están determinados por los parámetros de las funciones de demanda inversa. Sean $P_k(Q) = a_k - b_k Q$ las funciones de demanda inversa lineales en cada escenario k, $k = 1, 2$. Los equilibrios del primer escenario, del segundo y el equilibrio neutral son, respectivamente, $(c_1^*, c_1^*), (c_2^*, c_2^*), (c_n^*, c_n^*)$ con $c_1^* = \frac{a_1}{3b_1}, c_2^* = \frac{a_2}{3b_2}, c_n^* = \frac{a_1+a_2}{3(b_1+b_2)}$. El valor $\bar{Q}$ donde $P_1(Q) = P_2(Q)$ es $\bar{Q} = \frac{a_1-a_2}{b_1-b_2}$. Recordemos que el único punto de corte de la Ecuación 4.3.1 es $s_1 = \frac{a_1-a_2}{b_1-b_2} - \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}} \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 - b_2}$.

Equilibrio híbrido neutral-conservador

Proposición 4.5.10. *Si la empresa 1 es neutral y la empresa 2 es conservadora, siempre existe equilibrio y es único.*

a) *Si* $\bar{Q} \leq c_1^* + c_n^*$, *entonces* $E_{n,c}(G) = \{(2c_n^* - c_1^*, 2c_1^* - c_n^*)\}$.

b) *Si* $\bar{Q} \geq c_2^* + c_n^*$, *entonces* $E_{n,c}(G) = \{(2c_n^* - c_2^*, 2c_2^* - c_n^*)\}$.

c) *Si* $c_1^* + c_n^* \leq \bar{Q} \leq c_2^* + c_n^*$, *entonces* $E_{n,c}(G) = \{(\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} - \bar{Q}, 2\bar{Q} - \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2})\}$.

Demostración. Es consecuencia de aplicar el Teorema 4.5.2. □

Equilibrio híbrido neutral-optimista

Proposición 4.5.11. *Si la empresa 1 es neutral y la empresa 2 es optimista, se verifica*

a) *Cuando* $u_1(q_{M_1}, 0) < u_2(q_{M_2}, 0)$, *entonces* $E_{n,op}(G) = \{(2c_n^* - c_2^*, 2c_2^* - c_n^*)\}$.

b) *Cuando* $u_1(q_{M_1}, 0) > u_2(q_{M_2}, 0)$, *si existe equilibrio es único. Las condiciones para la existencia de equilibrio son* *b1) Si* $s_1 \geq 2c_n^* - c_1^*$*, entonces* $E_{n,op}(G) = \{(2c_n^* - c_1^*, 2c_1^* - c_n^*)\}$.

b2) Si $s_1 \leq 2c_n^* - c_1^*$*, entonces* $E_{n,op}(G) = \{(2c_n^* - c_2^*, 2c_2^* - c_n^*)\}$.

Demostración. Se obtiene aplicando el Teorema 4.5.5. □

Luego, puede que no exista equilibrio, pero en el caso en que lo haya, es único.

Equilibrio híbrido conservador-optimista

Para funciones de demanda inversa lineales, se calculan los valores

$$d_1^* = \tfrac{2}{3}\tfrac{a_1}{b_1} - \tfrac{1}{3}\tfrac{a_2}{b_2},\ d_2^* = \tfrac{2}{3}\tfrac{a_2}{b_2} - \tfrac{1}{3}\tfrac{a_1}{b_1}.$$

En este caso, debido a las propiedades de las funciones lineales, los apartados a) y b1) del Teorema 4.5.8 no los tenemos en cuenta porque nunca se dan dichas situaciones, como demostramos a continuación.

Observación 4.5.12. El punto $(s_1^1, R_{op}(s_1^1))$ no existe.

Tenemos que $P(\bar{Q}) = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 - b_2}$, y $\bar{Q} = \frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$, entonces se puede expresar $s_1 = \bar{Q} - \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}} P(\bar{Q})$. Veamos, en primer lugar, cuando $P(Q) = a_1 - b_1\bar{Q}$. En este caso, $s_1 = \bar{Q} - \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}}(a_1 - b_1\bar{Q}) = 2\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2} - \frac{a_1}{b_1}$. Si la mejor respuesta optimista cambia en $s_1 = \bar{q}_1$ con $\bar{Q} = \bar{q}_1 + r_1^2(\bar{q}_1)$, entonces $2\bar{Q} - \frac{a_1}{b_1} = \bar{Q} - \frac{1}{\sqrt{b_1 b_2}}(a_1 - b_1\bar{Q})$, por lo que $\bar{Q} = \frac{a_1}{b_1}$. De modo análogo se demuestra cuando $P(Q) = a_2 - b_2\bar{Q}$, $s_1 = \bar{q}_1$ con $\bar{Q} = \bar{q}_1 + r_2^2(\bar{q}_1)$, obtenemos que $\bar{Q} = \frac{a_2}{b_2}$.

Luego $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, pero por hipótesis inicial, $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$. Por tanto, $(s_1^1, R_{op}(s_1^1))$ no existe. □

Observación 4.5.13. Cuando $u_1(q_{M_1}, 0) < u_2(q_{M_2}, 0)$, (d_2^*, d_1^*) no existe.

En efecto, cuando $u_1(q_{M_1}, 0) < u_2(q_{M_2}, 0)$, como demuestran Caraballo et al. (2015), la función de mejor respuesta de la empresa optimista coincide con la función de mejor respuesta en el escenario 2, que no es la mejor respuesta en el escenario 1 y, por tanto, (d_2^*, d_1^*) no existe. □

Proposición 4.5.14. *Si la empresa 1 es conservadora y la empresa 2 es optimista,*

a) Cuando $u_1(q_{M_1}, 0) < u_2(q_{M_2}, 0)$,

$E_{c,op}(G) = (d_1^*, d_2^*)$ *si y sólo si* $\bar{Q} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\right)$ *y* $\frac{2}{3}\frac{a_1}{b_1} - \frac{1}{3}\frac{a_2}{b_2} \leq s_1$.

b) Cuando $u_1(q_{M_1}, 0) > u_2(q_{M_2}, 0)$,

$E_{c,op}(G) = (d_1^*, d_2^*)$ *si y sólo si* $\bar{Q} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\right)$ *y* $s_1 \leq d_1^*$.

$E_{c,op}(G) = (d_2^*, d_1^*)$ *si y sólo si* $\bar{Q} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\right)$ *y* $d_2^* \leq s_1$.

Demostración. Aplicando el Teorema 4.5.8, y teniendo en cuenta que en el caso lineal siempre hay un salto porque la solución de la Ecuación 4.3.1 es única, se tiene el resultado. □

Ejemplo 4.5.15. Para el modelo de duopolio lineal del Ejemplo 4.3.6, si la empresa 1 es neutral y la empresa 2 es conservadora, aplicando la Proposición 4.5.10, como $c_1^* + c_n^* = \frac{547}{1275}, c_2^* + c_n^* = \frac{28}{51}$, se verifica que $\bar{Q} \geq c_2^* + c_n^*$, y el equilibrio, como aparece en la Figura 4.8, es

$$E_{n,c}(G) = \{(2c_n^* - c_2^*, 2c_2^* - c_n^*) = \{(\tfrac{5}{51}, \tfrac{23}{51})\}.$$

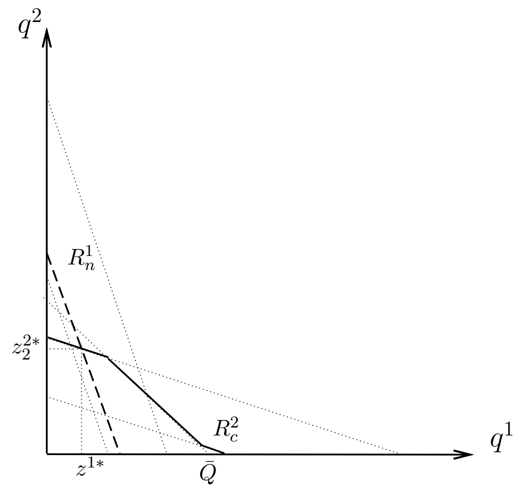


Figura 4.8. Equilibrio híbrido neutral-conservador. Caso lineal.

Si la empresa 1 es neutral y la empresa 2 es optimista, según la Proposición 4.5.11, puesto que $u_1(q_{M_1}, 0) > u_2(q_{M_2}, 0)$, y $s_1 \geq 2c_n^* - c_1^*$, el equilibrio existe y es único, como se observa en la Figura 4.9.

$$E_{n,op}(G) = \{(2c_n^* - c_1^*, 2c_1^* - c_n^*)\} = \{(\tfrac{278}{1275}, \tfrac{269}{1275})\}.$$

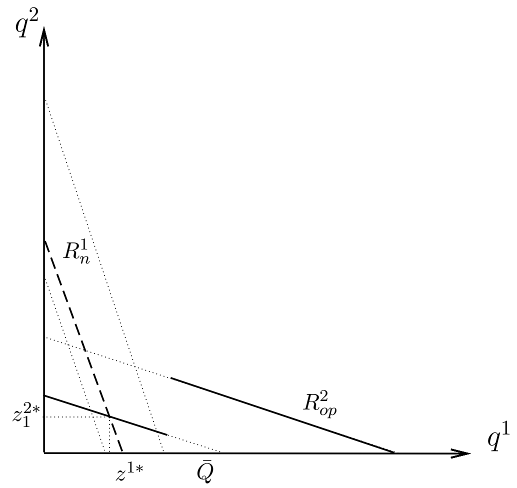


Figura 4.9. Equilibrio híbrido neutral-optimista. Caso lineal.

Cuando la empresa 1 es conservadora y la empresa 2 es optimista, aplicando la Proposición 4.5.14, dado que $u_1(q_{M_1}, 0) > u_2(q_{M_2}, 0)$, $\bar{Q} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\right)$ y $d_2^* \leq s_1$, el equilibrio, como se muestra en la Figura 4.10, es

$$E_{c,op}(G) = \{(d_1^*, d_2^*)\} = \{(\tfrac{34}{75}, \tfrac{7}{75})\}.$$

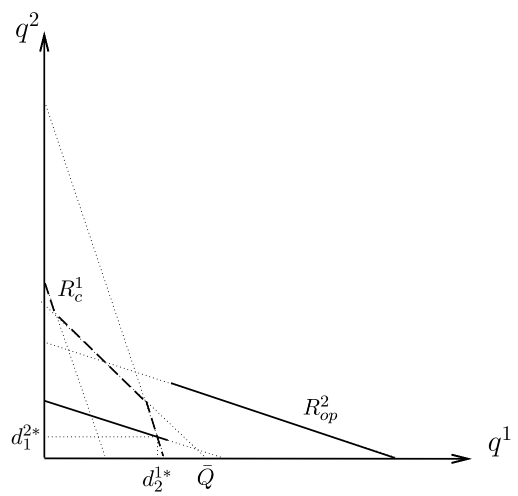


Figura 4.10. Equilibrio híbrido conservador-optimista. Caso lineal.

4.6. Equilibrios con información sobre probabilidades de ocurrencia de los escenarios

En las secciones precedentes de este capítulo se estudia un modelo de Cournot bajo incertidumbre no probabilístico para representar situaciones en las que no hay información sobre la probabilidad de ocurrencia de los dos escenarios considerados.

Si se conociesen las probabilidades de ocurrencia, se podrían estudiar los equilibrios con procedimientos basados en la utilidad esperada, tal y como hacen Gilboa y Schmeidler (1989) en su estudio de elección bajo incertidumbre. Una situación intermedia entre el caso de completa incertidumbre y el caso en el que las probabilidades son conocidas es cuando los agentes tienen información parcial sobre estas probabilidades, o actúan a partir de ciertas convicciones o ideas sobre los valores de éstas.

En esta sección estudiamos los efectos de incluir información parcial sobre las probabilidades en el cálculo de los equilibrios del modelo de oligopolio de Cournot con dos escenarios.

Consideramos que la valoración de los agentes de un perfil de estrategias depende de la utilidad esperada, es decir, si el agente i, supone que las probabilidades de ocurrencia de los escenarios vienen dadas por el vector $\lambda^i \in \Delta^2 = \{\lambda^i \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1^i + \lambda_2^i = 1, \lambda_j^i \geq 0, j = 1, 2\}$, entonces la función de valoración del agente i coincide con el beneficio esperado:

$$v_\lambda^i(q) = \lambda_1^i u_1^i(q) + \lambda_2^i u_2^i(q).$$

Si las probabilidades de ocurrencia fueran conocidas, los valores λ^i estarían determinados. En este caso, los equilibrios serían los equilibrios del correspondiente juego ponderado. Por otra parte, si se dispone de cierta información adicional, pero no completa sobre dichos valores, es posible determinar un subconjunto del conjunto de equilibrios del juego biescenario, o lo que es lo mismo, hacer un refinamiento de este conjunto.

El análisis que presentamos a continuación en este contexto de incertidumbre, se enmarca formalmente en el tratamiento general de los equilibrios con información parcial cuando las preferencias de los agentes están representadas por funciones de valor aditivas, propuesto en el Capítulo 2.

Dado el juego de Cournot bi-escenario con dos agentes, $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i=1,2}\}$ y la información sobre probabilidades, $\Lambda = \Lambda^1 \times \Lambda^2$, denotamos el juego con información sobre probabilidades como $G_\Lambda = \{(A^i, u_1^i, u_2^i, \Lambda^i)_{i=1,2}\}$, y por $E(G_\Lambda)$ al conjunto de equilibrios con información sobre probabilidades, como se definieron en la Definición 2.3.5.

En general, se sigue del Teorema 2.3.6 que el conjunto de equilibrios $E(G_\Lambda)$ coincide con el conjunto de equilibrios de un juego transformado, con utilidades vectoriales, $\{(A^i, v^i_\Lambda)_{i=1,2}\}$, donde $v^i_\Lambda = B^i \cdot u^i$, siendo B^i la matriz cuyas filas son los puntos extremos de Λ^i.

4.6.1. Equilibrios con probabilidades ordenadas

Nos centramos en el caso en que la información que utilizan los agentes para tomar sus decisiones consiste en un orden sobre las probabilidades de ocurrencia, es decir, cada agente considera que la probabilidad de ocurrencia de un escenario no es menor que la probabilidad de ocurrencia del otro. Formalmente, cada agente i puede considerar dos conjuntos de información, $\Lambda^i(1), \Lambda^i(2)$:

$$\Lambda^i(1) = \{\lambda^i \in \Delta^2 : \lambda^i_1 \geq \lambda^i_2\}, \quad \Lambda^i(2) = \{\lambda^i \in \Delta^2 : \lambda^i_2 \geq \lambda^i_1\}.$$

Proposición 4.6.1. *El conjunto de equilibrios para el juego con información sobre probabilidades $G_\Lambda = \{(A^i, u^i_1, u^i_2, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ coincide con el conjunto de equilibrios débiles del juego $\{(A^i, v^i_\Lambda)_{i\in N}\}$, donde para cada $i \in N$,*

a) Si $\Lambda^i = \Lambda^i(1)$, entonces

$$v^i_\Lambda(q) = \left(u^i_1(q), \frac{u^i_1(q) + u^i_2(q)}{2}\right).$$

b) Si $\Lambda^i = \Lambda^i(2)$, entonces

$$v^i_\Lambda(q) = \left(u^i_2(q), \frac{u^i_1(q) + u^i_2(q)}{2}\right).$$

Demostración. El resultado se sigue del Teorema 2.3.6, sabiendo que los puntos extremos del poliedro $\Lambda^i(1)$ son (1,0) y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y los de $\Lambda^i(2)$ son (0,1) y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. □

Cuando se incorpora información parcial en el modelo, el conjunto de equilibrios será un subconjunto del conjunto de equilibrios del juego bi-escenario original que, como establece el Teorema 2.2.4, consiste en el conjunto

$$T = \{(q^1, q^2) \,:\, r^i_1(q^{-i}) \leq q^i \leq r^i_2(q^{-i}),\, i = 1, 2\}.$$

El siguiente resultado identifica los distintos subconjuntos de equilibrios en los casos en que la información consiste en ordenaciones de las probabilidades de ocurrencia.

Teorema 4.6.2. *El conjunto de equilibrios utilitaristas para el juego con información sobre probabilidades* $G_\Lambda = \{(A^i, u_1^i, u_2^i, \Lambda^i)_{i\in N}\}$ *es*

a) Si $\Lambda^i = \Lambda^i(1)$, *para* $i = 1, 2$,

$$T_{11} = \{(q^1, q^2) : r_1^1(q^2) \le q^1 \le R_n^1(q^2), r_1^2(q^1) \le q^2 \le R_n^2(q^1)\}.$$

b) Si $\Lambda^i = \Lambda^i(2)$, *para* $i = 1, 2$,

$$T_{22} = \{(q^1, q^2) : r_n^1(q^2) \le q^1 \le R_2^1(q^2), r_n^2(q^1) \le q^2 \le R_2^2(q^1)\}.$$

c) Si $\Lambda^1 = \Lambda^1(1)$ *y* $\Lambda^2 = \Lambda^2(2)$,

$$T_{12} = \{(q^1, q^2) : R_1^1(q^2) \le q^1 \le r_n^1(q^2), r_n^2(q^1) \le q^2 \le R_2^2(q^1)\}.$$

d) Si $\Lambda^1 = \Lambda^1(2)$ *y* $\Lambda^2 = \Lambda^2(1)$,

$$T_{21} = \{(q^1, q^2) : R_n^1(q^2) \le q^1 \le r_2^1(q^2), r_1^2(q^1) \le q^2 \le R_n^2(q^1)\}.$$

Demostración. Se demuestra de forma análoga al Teorema 2.2.4, a partir de las expresiones de v_Λ^i establecidas en la proposición anterior. □

Nótese que la unión de estos subconjuntos es la región T.

4.6.1.1. Equilibrios conservadores

Cuando las empresas tienen una actitud conservadora, es decir, valoran el resultado mínimo de entre los posibles, el estudio se puede reducir al análisis en los puntos extremos del poliedro de pesos.

Sea $\bar{Q}$ el único valor de Q, tal que $P_1(\bar{Q}) = P_2(\bar{Q})$.

Proposición 4.6.3. *En el juego de Cournot bi-escenario con información sobre probabilidades,* $G_\Lambda = \{(A^i, u_1^i, u_2^i, \Lambda^i)_{i=1,2}\}$, *la función de valor para un agente conservador es*

a) Si $\Lambda^i = \Lambda^i(1)$,

$$v_c^{\Lambda^i}(q) = \begin{cases} u_1^i(q) & si\ q^1 + q^2 \ge \bar{Q} \\ \frac{u_1^i(q)+u_2^i(q)}{2} & si\ q^1 + q^2 \le \bar{Q} \end{cases}$$

b) Si $\Lambda^i = \Lambda^i(2)$,

$$v_c^{\Lambda^i}(q) = \begin{cases} u_2^i(q) & si\ q^1 + q^2 \ge \bar{Q} \\ \frac{u_1^i(q)+u_2^i(q)}{2} & si\ q^1 + q^2 \le \bar{Q} \end{cases}$$

Demostración. De la Proposición 2.3.9, se sigue que

$$\text{Si } \Lambda^i = \Lambda^i(1), \text{ entonces } v_c^{\Lambda^i}(q) = \text{mín}\left\{u_1^i(q), \tfrac{u_1^i(q)+u_2^i(q)}{2}\right\}.$$

$$\text{Si } \Lambda^i = \Lambda^i(2), \text{ entonces } v_c^{\Lambda^i}(q) = \text{mín}\left\{u_2^i(q), \tfrac{u_1^i(q)+u_2^i(q)}{2}\right\}.$$

Y de aquí las expresiones de las funciones de valoración. □

La identificación de los equilibrios conservadores cuando los dos agentes disponen de la misma información puede hacerse a partir del Teorema 4.4.3, teniendo en cuenta la equivalencia del juego con información sobre probabilidades $G_\Lambda = \{(A^i, u_1^i, u_2^i, \Lambda^i)_{i=1,2}\}$ con los juegos de Cournot transformados.

Sean $(c_1^*, c_1^*), (c_2^*, c_2^*)$ los equilibrios de Cournot en los dos escenarios y (c_n^*, c_n^*) el equilibrio neutral. Sea (z_k^{*1}, z_k^{*2}), $k = 1, 2$, los puntos de intersección de la mejor respuesta de la empresa 1 si manifiesta una actitud neutral ante el riesgo, R_n^1, y la mejor respuesta de la empresa 2 en el escenario k, r_k^2. Puesto que las funciones de demanda inversa son idénticas en cada escenario, (z_k^{*2}, z_k^{*1}), $k = 1, 2$ es la intersección de la mejor respuesta de la empresa 1 en el escenario k, r_k^1, y la mejor respuesta neutral de la empresa 2, R_n^2.

En el siguiente resultado se identifican los equilibrios con información sobre probabilidades en cada caso.

Teorema 4.6.4. *El conjunto de los equilibrios conservadores del juego de Cournot* $G = \{(A^i, u_1^i, u_2^i)_{i\in N}\}$ *con información sobre probabilidades viene dado por*

a) Cuando $\Lambda = \Lambda^1(1) \times \Lambda^2(1)$,

- *a1) Si* $\bar{Q} \leq 2c_1^*$, *entonces* $E_c(G) = \{(c_1^*, c_1^*)\}$.
- *a2) Si* $2c_1^* < \bar{Q} < 2c_n^*$, *entonces* $E_c(G) = T_{11} \cap L$.
- *a3) Si* $\bar{Q} \geq 2c_n^*$, *entonces* $E_c(G) = \{(c_n^*, c_n^*)\}$.

b) Cuando $\Lambda = \Lambda^1(2) \times \Lambda^2(2)$,

- *b1) Si* $\bar{Q} \leq 2c_n^*$, *entonces* $E_c(G) = \{(c_n^*, c_n^*)\}$.
- *b2) Si* $2c_n^* < \bar{Q} < 2c_2^*$, *entonces* $E_c(G) = T_{22} \cap L$.
- *b3) Si* $\bar{Q} \geq 2c_2^*$, *entonces* $E_c(G) = \{(c_2^*, c_2^*)\}$.

c) Cuando $\Lambda = \Lambda^1(1) \times \Lambda^2(2)$, *c1) Si* $\bar{Q} \leq z_1^{*1} + z_1^{*2}$, *entonces* $E_c(G) = \{(z_1^{*2}, z_1^{*1})\}$.

c2) Si $z_1^{*1} + z_1^{*2} < \bar{Q} < z_2^{*1} + z_2^{*2}$, *entonces* $E_c(G) = T_{12} \cap L$.

c3) Si $\bar{Q} \geq z_2^{*1} + z_2^{*2}$, *entonces* $E_c(G) = \{(z_2^{*1}, z_2^{*2})\}$.

d) Cuando $\Lambda = \Lambda^1(2) \times \Lambda^2(1)$,

d1) Si $\bar{Q} \leq z_1^{*1} + z_1^{*2}$, *entonces* $E_c(G) = \{(z_1^{*1}, z_1^{*2})\}$.

d2) Si $z_1^{*1} + z_1^{*2} < \bar{Q} < z_2^{*1} + z_2^{*2}$, *entonces* $E_c(G) = T_{21} \cap L$.

d3) Si $\bar{Q} \geq z_2^{*1} + z_2^{*2}$, *entonces* $E_c(G) = \{(z_2^{*2}, z_2^{*1})\}$.

Obsérvese que cuando existen equilibrios conservadores del juego de Cournot original están en el subconjunto de equilibrios del juego con información sobre probabilidades, entonces estos equilibrios conservadores del juego original son también equilibrios conservadores del juego con información. Además, en estos juegos el precio y la cantidad total son conocidos previamente. No obstante, si no existen equilibrios conservadores del juego original en la región de equilibrios del juego con información, entonces el equilibrio del juego con información existe y es único, no pudiendo establecerse a priori el precio.

4.6.2. Equilibrios con probabilidades ordenadas para funciones de demanda inversa lineales

Dadas las especiales características de los modelos cuando se consideran funciones lineales, realizamos a continuación un análisis de los equilibrios con información sobre las probabilidades de ocurrencia de los escenarios, para funciones de demanda inversa lineales. Sean las funciones $P_1(Q) = a_1 - b_1 Q$ y $P_2(Q) = a_2 - b_2 Q$.

Equilibrios con probabilidades ordenadas

Los conjuntos de equilibrios, aplicando el Teorema 4.6.2, son

a) Si $\Lambda^i = \Lambda^i(1)$, para $i = 1, 2$,

$$T_{11} = \{(q^1, q^2) \,:\, \frac{a_1}{3b_1} - \frac{q^2}{2} \leq q^1 \leq \frac{a_1 + a_2}{3(b_1 + b_2)} - \frac{q^2}{2}, \frac{a_1}{3b_1} - \frac{q^1}{2} \leq q^2 \leq \frac{a_1 + a_2}{3(b_1 + b_2)} - \frac{q^1}{2}\}.$$

b) Si $\Lambda^i = \Lambda^i(2)$, para $i = 1, 2$,

$$T_{22} = \{(q^1, q^2) \,:\, \frac{a_1 + a_2}{3(b_1 + b_2)} - \frac{q^2}{2} \leq q^1 \leq \frac{a_2}{3b_2} - \frac{q^2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{3(b_1 + b_2)} - \frac{q^1}{2} \leq q^2 \leq \frac{a_2}{3b_2} - \frac{q^1}{2}\}.$$

c) Si $\Lambda^1 = \Lambda^1(1)$, y $\Lambda^2 = \Lambda^2(2)$,

$$T_{12} = \{(q^1, q^2) \, : \, \frac{a_1}{3b_1} - \frac{q^2}{2} \leq q^1 \leq \frac{a_1 + a_2}{3(b_1 + b_2)} - \frac{q^2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{3(b_1 + b_2)} - \frac{q^1}{2} \leq q^2 \leq \frac{a_2}{3b_2} - \frac{q^1}{2}\}.$$

d) Si $\Lambda^1 = \Lambda^1(2)$, y $\Lambda^2 = \Lambda^2(1)$,

$$T_{21} = \{(q^1, q^2) \, : \, \frac{a_1 + a_2}{3(b_1 + b_2)} - \frac{q^2}{2} \leq q^1 \leq \frac{a_2}{3b_2} - \frac{q^2}{2}, \frac{a_1}{3b_1} - \frac{q^1}{2} \leq q^2 \leq \frac{a_1 + a_2}{3(b_1 + b_2)} - \frac{q^1}{2}\}.$$

Obsérvese que la unión de estos conjuntos es la región T, y que cada uno de los cuatro subconjuntos es la envolvente convexa de sus cuatro puntos extremos.

Equilibrios conservadores con probabilidades ordenadas

Aplicando el Teorema 4.6.4, los equilibrios conservadores son los siguientes

a) Cuando $\Lambda = \Lambda^1(1) \times \Lambda^2(1)$,

- a1) Si $\bar{Q} \leq \frac{2a_1}{3b_1}$, entonces $E_c(G) = \{(\frac{a_1}{3b_1}, \frac{a_1}{3b_1})\}$.
- a2) Si $\frac{2a_1}{3b_1} < \bar{Q} < \frac{2(a_1+a_2)}{3(b_1+b_2)}$, entonces $E_c(G) = T_{11} \cap \{(q^1, q^2) : q^1 + q^2 = \frac{a_1-a_2}{b_1-b_2}\}$.
- a3) Si $\bar{Q} \geq \frac{2(a_1+a_2)}{3(b_1+b_2)}$, entonces $E_c(G) = \{(\frac{a_1+a_2}{3(b_1+b_2)}, \frac{a_1+a_2}{3(b_1+b_2)})\}$.

b) Cuando $\Lambda = \Lambda^1(2) \times \Lambda^2(2)$,

- b1) Si $\bar{Q} \leq \frac{2(a_1+a_2)}{3(b_1+b_2)}$, entonces $E_c(G) = \{(\frac{a_1+a_2}{3(b_1+b_2)}, \frac{a_1+a_2}{3(b_1+b_2)})\}$.
- b2) Si $\frac{2(a_1+a_2)}{3(b_1+b_2)} < \bar{Q} < \frac{2a_2}{3b_2}$, entonces $E_c(G) = T_{22} \cap \{(q^1, q^2) : q^1 + q^2 = \frac{a_1-a_2}{b_1-b_2}\}$.
- b3) Si $\bar{Q} \geq \frac{2a_2}{3b_2}$, entonces $E_c(G) = \{\frac{a_2}{3b_2}, \frac{a_2}{3b_2})\}$.

c) Cuando $\Lambda = \Lambda^1(1) \times \Lambda^2(2)$,

- c1) Si $\bar{Q} \leq c_1^* + c_n^*$, entonces $E_c(G) = \{(2c_1^* - c_n^*, 2c_n^* - c_1^*)\}$.
- c2) Si $c_1^* + c_n^* < \bar{Q} < c_2^* + c_n^*$, entonces $E_c(G) = T_{12} \cap (q^1, q^2) : q^1 + q^2 = \frac{a_1-a_2}{b_1-b_2}\}$.
- c3) Si $\bar{Q} \geq c_2^* + c_n^*$, entonces $E_c(G) = \{(2c_n^* - c_2^*, 2c_2^* - c_n^*)\}$.

d) Cuando $\Lambda = \Lambda^1(2) \times \Lambda^2(1)$,

- d1) Si $\bar{Q} \leq c_1^* + c_n^*$, entonces $E_c(G) = \{(2c_n^* - c_1^*, 2c_1^* - c_n^*)\}$.
- d2) Si $c_1^* + c_n^* < \bar{Q} < c_2^* + c_n^*$, entonces $E_c(G) = T_{21} \cap \{(q^1, q^2) : q^1 + q^2 = \frac{a_1-a_2}{b_1-b_2}\}$.

d3) Si $\bar{Q} \geq c_2^* + c_n^*$, entonces $E_c(G) = \{(2c_2^* - c_n^*, 2c_n^* - c_2^*)\}$.

Si hay multiplicidad de equilibrios, en todos ellos el precio es el mismo: $\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 - b_2}$, y la cantidad total es $\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$.

Ejemplo 4.6.5. Continuamos con el Ejemplo 4.3.6 donde las funciones de demanda inversa lineales son $P_1(Q) = 32 - 50Q$ y $P_2(Q) = 1 - Q$. El conjunto de equilibrios del juego de Cournot con dos escenarios viene dado en la Figura 4.11, donde además están representados los conjuntos de equilibrios utilitaristas T_{11}, T_{12}, T_{21} y T_{22}, en los que cada agente considera que la probabilidad de ocurrencia de un escenario no es menor que la probabilidad de ocurrencia del otro.

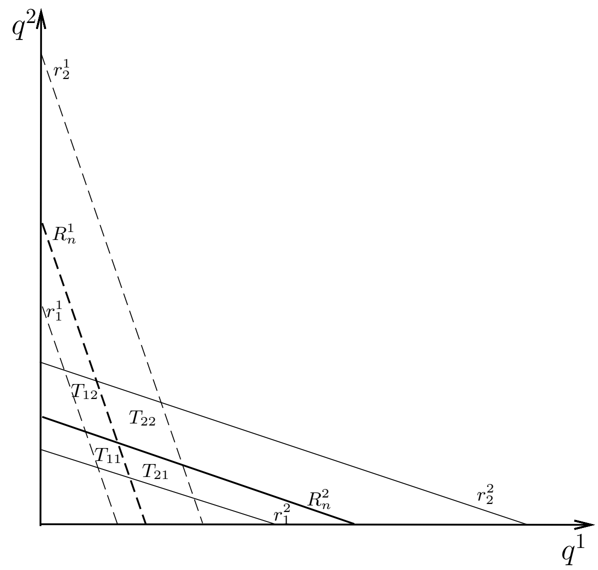


Figura 4.11. Conjuntos de equilibrios con probabilidades ordenadas. Caso lineal.

Cada uno de estos conjuntos es la envolvente convexa de sus puntos extremos, así

$T_{11} = con\{(\frac{11}{51}, \frac{11}{51}), (\frac{16}{75}, \frac{16}{75}), (\frac{278}{1275}, \frac{269}{1275}), (\frac{269}{1275}, \frac{278}{1275})\}$.
$T_{22} = con\{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{11}{51}, \frac{11}{51}), (\frac{23}{51}, \frac{5}{51}), (\frac{5}{51}, \frac{23}{51})\}$.
$T_{12} = con\{(\frac{5}{51}, \frac{23}{51}), (\frac{269}{1275}, \frac{278}{1275}), (\frac{11}{51}, \frac{11}{51}), (\frac{7}{75}, \frac{34}{75}\}$.
$T_{21} = con\{(\frac{23}{51}, \frac{5}{51}), (\frac{278}{1275}, \frac{269}{1275}), (\frac{11}{51}, \frac{11}{51}), (\frac{34}{75}, \frac{7}{75})\}$.

Cuando los agentes son conservadores, los equilibrios aparecen en la Figura 4.12.
a) Si $\Lambda^i = \Lambda^i(1)$, para $i = 1, 2$, $E_c(G) = \{(\frac{11}{51}, \frac{11}{51})\}$.

b) Si $\Lambda^i = \Lambda^i(2)$, para $i = 1, 2$, $E_c(G) = \{(q^1, q^2) : q^1 + q^2 = \frac{31}{49}, \frac{13}{49} \leq q^1 \leq \frac{18}{49}\}$. En todos los equilibrios el precio es el mismo $\frac{18}{49}$ y la cantidad total de producto también es la misma: $\frac{31}{49}$.

c) Si $\Lambda^1 = \Lambda^1(1)$, y $\Lambda^2 = \Lambda^2(2)$, $E_c(G) = \{(\frac{5}{51}, \frac{23}{51})\}$.

d) Si $\Lambda^1 = \Lambda^1(2)$, y $\Lambda^2 = \Lambda^2(1)$, $E_c(G) = \{(\frac{23}{51}, \frac{5}{51})\}$.

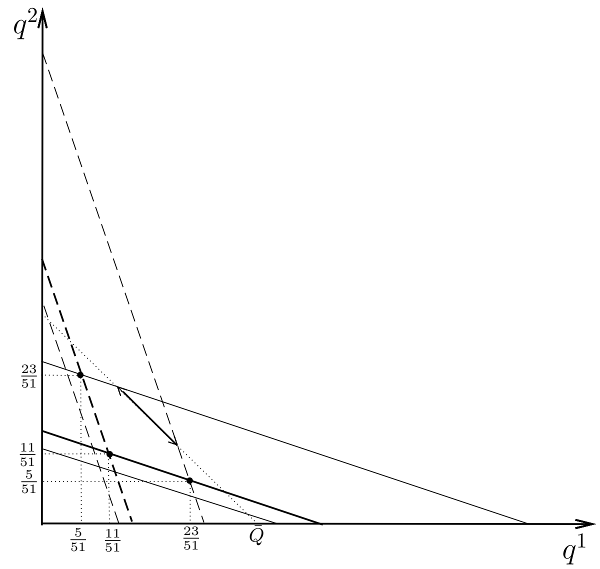


Figura 4.12. Equilibrios conservadores con probabilidades ordenadas. Caso lineal.

Conclusiones

La investigación realizada en esta tesis proporciona un análisis innovador de los modelos estratégicos en los que las preferencias de los agentes son incompletas y pueden representarse mediante utilidades multidimensionales. Con ello, se extiende el estudio de los modelos de juegos no cooperativos a un marco más general donde pueden encuadrarse como caso particular los resultados clásicos, y ofrece soluciones alternativas de los modelos económicos de interacción estratégica, que reflejan más fielmente ciertos aspectos cruciales.

En primer lugar, en relación con el concepto de equilibrio para juegos estratégicos con funciones de utilidad vectoriales, hemos establecido una caracterización de los equilibrios mediante funciones de escalarización basadas en representaciones maximin de las preferencias. La principal y relevante diferencia con las caracterizaciones ya existentes, basadas en escalarizaciones aditivas, radica en la aplicabilidad a un campo más amplio de problemas, dado que no es preciso que se cumplan hipótesis de convexidad.

Asimismo, hemos introducido, en un marco general, la posibilidad de incluir información parcial sobre las preferencias de los agentes, proporcionando un procedimiento para determinar los equilibrios. Esto conlleva la posibilidad, tanto para equilibrios utilitaristas como para equilibrios maximin, de considerar diversas actitudes de los agentes, tales como un comportamiento conservador, optimista o neutral ante el riesgo.

Hemos puesto de manifiesto la potencialidad de esta teoría al analizar las implicaciones que tiene alterar dos supuestos esenciales en los modelos económicos tradicionales: la búsqueda del propio interés y la certidumbre. Este análisis requiere el tratamiento multidimensional de la utilidad de los agentes.

Dada la importancia que tiene el tema de una economía sostenible hemos analizado con esta metodología los modelos de bienes comunales. Con la introducción de preferencias sociales, en las que cada individuo no sólo considera su beneficio sino el beneficio de todos y cada uno de los usuarios del recurso comunal, ponemos de manifiesto que no son necesarias ni la intervención del estado ni la asignación de derechos de propiedad de recursos comunes para evitar su agotamiento, puesto que existen equilibrios en estos modelos que evitan la tragedia de los comunes. De esta forma, concluimos que la sostenibilidad de los recursos no aparece como algo añadido sino como una implicación del propio modelo, por lo que podríamos hablar de los microfundamentos de la sostenibilidad.

Con motivo de la reciente crisis económica, muchas empresas se han planteado conciliar la eficacia empresarial con determinados principos sociales. Este nuevo marco empresarial nos ha llevado al estudio del oligopolio de Cournot con empresas socialmente responsables. Para ello, hemos considerado que las empresas, además de su propio beneficio, incluyen en su función de utilidad los intereses de otros agentes económicos, concretamente de los consumidores. Con este planteamiento las empresas tienen funciones de utilidad vectoriales. Lo que hemos denominado responsabilidad social positiva engloba dos posibles situaciones, que las empresas estén asumiendo una externalidad positiva, o bien que sencillamente integren en su función de utilidad los intereses de los consumidores por determinados bienes privados que no generan por sí mismo un fallo del mercado. Asimismo, lo que hemos denominado responsabilidad social negativa no tiene por qué interpretarse como una perversión de la empresa que intenta perjudicar a los consumidores, sino como una forma de modelizar la internalización de una externalidad negativa por parte de la empresa, lo que supone también un comportamiento social. En este caso, también es cierto que, si aplicamos la responsabilidad social negativa a un bien privado que por sí mismo no genera un fallo del mercado, nos acercaríamos a la solución colusoria, que consiste en llegar a un acuerdo con el objeto de actuar conjuntamente.

Con este tratamiento diverso de la responsabilidad social, si la interpretamos como asunción de externalidades, basta con que exista una empresa socialmente responsable para que el equilibrio que se alcance sea más eficiente en el sentido económico. Asimismo, si estamos tratando con bienes privados que no generan un fallo del mercado, es suficiente con que una empresa tenga responsabilidad social positiva y la otra sea maximizadora de beneficios para que se reduzca el coste social, e incluso aunque una tenga responsabilidad social positiva y la otra responsabilidad social negativa, existen determinados casos en los que las situaciones de equilibrio generan una disminución del coste social en relación al coste social en el tradicional oligopolio maximizador de beneficios. En cualquier caso, siempre existen equilibrios que reducen el coste social.

Para analizar las consecuencias de alterar el supuesto clásico de certidumbre consideramos funciones de utilidad multidimensionales. Nos hemos centrado en la incertidumbre sobre la demanda cuando existen dos posibles escenarios futuros y las empresas manifiestan diversas actitudes hacia el riesgo. Destacamos que para el caso de empresas neutrales, o cuando una es neutral y otra conservadora, siempre existe equilibrio y es único. Sin embargo, cuando una de las empresas es optimista no se puede asegurar la existencia de equilibrio, si bien hemos establecido las condiciones para que existan equilibrios y el procedimiento para determinarlos.

Como caso particular, con funciones de demanda lineales, si todas las empresas son optimistas existe equilibrio, y en el caso en que las dos empresas manifiestan actitudes distintas, si hay una empresa optimista y existe equilibrio, entonces éste es único. Asimismo, una conclusión interesante es que, cuando todas las empresas son conservadoras, la situación que lleva a que los equilibrios sean múltiples conlleva una cantidad total del mercado y un precio conocidos previamente, sea cual sea el escenario que finalmente ocurra.

Cuando existe cierta información sobre las probabilidades de ocurrencia de los escenarios, realizamos un estudio de los equilibrios que los agentes alcanzarían valorando la utilidad esperada. Un caso particularmente interesante es en el que los agentes consideran que las probabilidades de ocurrencia están ordenadas, ya que en este caso siempre existen equilibrios conservadores. No obstante, estos equilibrios no tienen por qué coincidir con los equilibrios conservadores del modelo original. Cuando no se da esta coincidencia, sólo existe un equilibrio conservador del modelo con probabilidades ordenadas, que no está asociado a los precios conservadores del modelo original.

La versatilidad del modelo general planteado proporciona una herramienta plenamente funcional que se puede aplicar a situaciones muy diversas, lo que permitirá ampliar el estudio en un futuro a otros problemas de índole económica que sean susceptibles de analizarse con funciones de utilidad vectoriales y preferencias incompletas.

Bibliografía

Afanador, J.C. (2009) Altruismo en el manejo de recursos de uso común: un caso con pescadores artesanales. Gestión y ambiente 12(3): 49-62.

Allevi, E., Gnudi, A., Konnov, I.V., Schailable S. (2003) Noncooperative games with vector payoffs under relative seudomonotonicity. Journal of Optimization Theory and Applications 118: 245-254.

Anam, M., Basher, S.A., Chiang, S-H. (2007) Mixed oligopoly under demand uncertainty. The B. E. Journal of Theoretical Economics 7: 1-24.

Asplund, M. (2002) Risk-averse firms in oligopoly. International Journal of Industrial Organization 20: 995-1012.

Aumann, R. (1962) Utility theory without the completeness axiom. Econometrica 30: 445-462.

Bade, S. (2003) Divergent platforms. Mimeo. New York University.

Bade S. (2005) Nash equilibrium in games with incomplete preferences. Economic Theory 26: 309-332.

Barclay, P. (2004) Trustworthiness and competitive altruism can also solve the tragedy of the commons. Evolution and Human Behavior 25: 209-220.

Baron, D.P. (2001) Private politics, corporate social responsibility, and integrated strategy. Journal of Economics and Management Strategy 10: 7-45.

Baron, D.P. (2007) Corporate social responsibility and social entrepreneurship. Journal of Economics and Management Strategy 16: 683-717.

Bénabou, R., Tirole, J. (2010) Individual and corporate social responsibility . Economica 77 (305): 1-19.

Bertacchini, E., de Mot, J., Depoorter, B. (2008) Never two without three: commons, anticommons and semicommons. Review of Law and Economics 5: 163-176.

Bewley, T. (1986) Knightian utility theory: Part 1. Cowles Foundation Discussion Paper 807.

Bischi, G.I., Chiarella, C., Kopel, M. (2004) The long run outcomes and global dynamics of a duopoly game with misspecified demand functions. International Game Theory Review 6(3): 343-380.

Blackwell, D. (1956) An analog of the minimax theorem for vector payoffs. Pacific Journal of Mathematics 6: 1-8.

Borm, P.E.M., Tijs, S.H., Van Den Aarssen, J. C. M. (1988) Pareto equilibrium in multiobjective games. Methods of Operations Research 60: 303-312.

Bowen, H. (1953) Social responsibility of the business. Harper and Row. New York.

Buchanan, J. M., Yoon, Y.J. (2000) Symmetric tragedies: commons and anticommons. Journal of Law and Economics 43: 1-13.

Calveras, A., Ganuza, J.J., Llobert, G. (2007) Regulation, corporate social responsibility, and activism. Journal of Economics and Management Strategy 10: 719-740.

Caraballo, M.A., Mármol, A.M., Monroy, L., Buitrago, E. (2015) Cournot competition under uncertainty. Conservative and optimistic equilibria. Review of Economic Design 19(2): 145-165.

Cárdenas, J.C. (2000) How do groups solve local commons dilemmas? Lessons from experimental economics in the field. Development and Sustainability 2: 305-322.

Casari, M., Plott, C.R. (2003) Decentralized management of a common property resource: experiments with centuries-old institutions. Journal of Economic Behavior and Organization 51(2): 217-247.

Chebbi, S. (2008) Existence of Pareto equilibria for non-compact constrained multicriteria games. Journal of Applied Analysis 14: 219-226.

Chiarella, C., Szidarovszky, F. (2009) A multiobjective model of oligopolies under uncertainty. CUBO A Mathematical Journal 11(2): 107-115.

Clarke, R.N. (1982) Duopolist don't wish to share information. Economics Letters 14: 33-36.

Clarke, R.N. (1983) Collusion and the incentives for information sharing. Bell Journal of Economics 14: 383-394.

Clemente, M., Fernández, F.R., Puerto, J. (2011) Pareto-optimal security strategies in matrix games with fuzzy payoffs. Fuzzy Sets and Systems 176: 36-45.

Comte, A. (1851-54) Systéme de politique positive ou traité de sociologie, en Oeuvres d'Auguste Comte. Editions Anthropos. Paris.

Corley, H.W. (1985) Games with vector payoffs. Journal of Optimization Theory and Applications 47: 491-498.

Cournot A.A. (1838) Recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses. Hachette. Paris.

Cox, M., Arnold, G., Villamayor, S. (2010) A review of design principles for community-based natural resource management. Ecology and Society 15:38.

Crifo, P., Forget, V.D. (2013) Think global, invest responsible: why the private equity industry goes green. Journal of Business Ethics 116(1): 21-48.

de Frutos M.A., Fabra N. (2011) Endogenous capacities and price competition: the role of demand uncertainty. International Journal of Industrial Organization 29: 399-411.

de Marco, G., Morgan, J. (2011) Altruistic behavior and correlated equilibrium selection. International Game Theory Review 13(4): 363-381.

Diekert, F.K. (2012) The tragedy of the commons from a game-theoretic perspective. Sustainability 4: 1776-1786.

Ding, X. (2000) Existence of Pareto equilibria for constrained multiobjective games in H-space. Computers and Mathematics with Applications 39: 125-134.

Dreber, A., Fudenberg, D., Rand, D.G. (2014) Who cooperates in repeated games: the role of altruism, inequity aversion, and demographics. Journal of Economic Behavior and Organization 98: 41-55.

Dubra, J., Maccheroni, F., Ok, E. (2004) Expected utility theory without the completeness axiom. Journal of Economic Theory 115: 118-133.

Edney, J.J. (1980) The commons problem. American Psychologist 35: 131-150.

Einy, E., Haimanko, O., Moreno, D., Shitovitz, B. (2010) On the existence of Bayesian Cournot equilibrium. Games and Economic Behavior 68: 77-94.

Faysse, N. (2005) Coping with the tragedy of the commons: game structure and design of rules. Journal of Economic Surveys 19: 239-261.

Fennell, L.A. (2004) Common interest tragedies. Northwestern University Law Review 98: 907-990.

Fernández, F.R., Hinojosa, M.A., Mármol, A.M., Puerto, J. (2002) Solution concepts in multiple criteria linear production games. Lecture Notes in Economics anda Mathematical Systems. Advances in Soft Computing 12: 257-271.

Fernández, F.R., Hinojosa, M.A., Puerto, J. (2004) Multi-criteria minimum cost spanning tree games. European Journal of Operational Research 158(2): 399-408.

Fernández, F.R., Mármol, A.M., Monroy, L., Puerto, J. (2000a) Utopian efficient strategies in multicriteria matrix games. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 455: 245-254.

Fernández, F.R., Mármol, A.M., Monroy, L., Puerto, J. (2000b) Multiple scenario competitive market. Game theory and applications V. Nova Science Publishers Inc. New York.

Fontini, F. (2005) Cournot oligopoly under strategic uncertainty with optimistic and pessimistic firms. Metroeconomica 56: 318-333.

Gal-Or, E. (1985) Information sharing in oligopoly. Econometrica 53: 329-343.

Gal-Or, E. (1986) Information transmission-Cournot and Bertrand equilibria. Review of Economic Studies 53: 85-92.

Ghose, D., Prasad, U.R. (1989) Solution concept in two-person multicriteria games. Journal of Optimization Theory an Applications 63 (2): 167-189.

Gilboa, I., Schmeidler, D. (1989) Maxmin expected utility with non-unique prior. Journal of Mathematical Economics 18: 141-153.

Giovanni, C., Giacinta, C. (2007) Corporate social responsibility and managerial entrenchment. Journal of Economics and Management Strategy 10: 741-771.

Goering, G.E. (2007) The strategic use of managerial incentives in a non-profits firm in mixed duopoly. Managerial and Decision Economics 28: 83-91.

Gordon, H.S. (1954) The economic theory of a common-property resource: the fishery. Journal of Political Economy 62: 124-142.

Hardin, G. (1968) The tragedy of the commons. Science 162: 1243-1248.

Heller, M.A. (1998) The tragedy of the anticommons: property in the transition from Marx to markets. Harvard Law Review 11: 621-688.

Hinojosa, M.A., Mármol, A.M. (2011) Egalitarianism and utilitarism in multiple criteria decision problemas with partial information. Group Decision and Negotiation 20: 707-724.

Hsu, S.L. (2003) A Two-dimensional framework for analyzing property rights regimes. U. C. Davis Law Review 36: 813-893.

Karnani, A. (2011) CSR stuck in a logical trap. California Management Review 53(2): 105-111.

Keeney, R. L., Raiffa, H. (1976) Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs. Wiley. New York .

Kirby, A. (1988) Trade associations as information exchange mechanisms. RAND Journal of Economics 19: 138-146.

Kim, W.W. (2000) Weight Nash equilibria for generalized multiobjective games. Journal of the Chungcheong Mathematical Society 13(1): 13-20.

Kitzmueller, M., Shimshack, J. (2012) Economic perspectives on corporate social responsibility. Journal of Economic Literature 50: 51-84.

Kopel, M., Brand, B. (2012) Socially responsible firms and endogenous choice of strategic incentives. Economic Modelling 29: 982-989.

Kreps, D.M., Scheinkman, J.A. (1983) Quantity precommitment and Bertrand competition yield Cournot outcomes. The Bell Journal of Economics 14: 326-337.

Kruś, L, Bronisz, P. (1994) On n-person noncooperative multicriteria games described in strategic form. Annals of Operations Research 83: 51-97.

Lagerlöf, J.M.N. (2007) Insisting on a non-negative price: oligopoly, uncertainty, welfare, and multiple equilibria. International Journal of Industrial Organization 25: 861-875.

Lambertini, L., Tampieri, A. (2010) Corporate social responsibility in a mixed oligopoly. Working Paper, 723. University of Bologna.

Lepore, J.J. (2012) Cournot outcomes under Bertrand-Edgeworth competition with demand uncertainty. Journal of Mathematical Economics 48: 177-186.

Li, L. (1985) Cournot oligopoly with information sharing. The RAND Journal of Economics 16: 521-536.

Lotem, A., Fishman, M.A., Stone, L. (1999) Evolution of cooperation between individuals. Nature 400: 226-227 .

Lu, Y., Poddar, S. (2006) The choice of capacity in mixed duopoly under demand uncertainty. The Manchester School 74: 266-272.

Manasakis, C., Mitrokostas, E., Petrakis, E. (2013) Certification of corporate social responsibility activities in oligopolistic markets. Canadian Journal of Economics 46(1): 282-309.

Margolis, J.D., Walsh, J.P. (2001) People and profits? The search for a link between a company's social and financial performance. Erlbaum. Mahwah.

Mármol, A.M. , Monroy, L., Rubiales, V. (2007) An equitable solution for multicriteria bargaining games. European Journal of Operational Research 177(3): 1523-1534.

Marshall, A. (1890) Principles of economics. Macmillan. London.

Milinski, M., Semmann, D., Bakker, T.C.M., Krambeck, H.J. (2001) Cooperation through indirect reciprocity: image scoring or standing strategy? Proceedings of the Royal Society of London B 268: 2495-2501.

Milinski, M., Semmann, D., Krambeck, H.J. (2002) Reputation helps solve the tragedy of the commons. Nature 415: 424-426.

Mill, J.S. (1971) El utilitarismo. Aguilar. Madrid.

Monroy, L., Fernández, F.R. (2011) The Shapley-Shubik index for multi-criteria simple games. European Journal of Operational Research 209(2): 122-128.

Monroy, L., Fernández, F.R. (2014) Banzhaf index for multiple voting systems. An application to the European Union. Annals of Operations Research 215(1): 215-230.

Monroy, L., Rubiales, V., Mármol, A. M. (2015) The conservative Kalai-Smorodinsky solution for multiple scenario bargaining. Annals of Operational Research. DOI: 10.1007/s10479-015-1984-5.

Montanier, J.M., Bredeche, N. (2011) Surviving the tragedy of commons: emergence of altruism in a population of evolving autonomous agents. XI European Conference on Artificial Life. Paris.

Munzer, S.R. (2005) The commons and the anticommons in the law and theory of property. In The Blackwell Guide to the Philosophy of Law and Legal Theory, edited by Martin P. Golding and William A. Edmundson, 148-162. Blackwell Publishing. Oxford.

Nash, J. (1950) Equilibrium points in n-person games. Proceedings of the National Academy of the USA 36(1): 48-49.

Nash, J. (1951) Non-cooperative games. The Annals of Mathematics 54(2): 286-295.

Ni, D., Li, K.W., Tang, X. (2010) Social responsibility allocation in two-echelon supply chains: insights from wholesale price contracts. European Journal of Operations Research 207: 1269-1279.

Nishizaki, I., Sakawa, M. (2000) Equilibrium solutions in multiobjective bimatrix games with fuzzy pay-offs and fuzzy goals. Fuzzy Sets and Systems 111(1): 99-116.

Nishizaki, I., Sakawa, M. (2001) On computational methods for solutions of multiobjective linear production programming games. European Journal of Operational Research 129(2): 386-413.

Norman, C. (1984) No panacea for the firewood crisis. Science 226: 676.

Novshek, W.Y.H., Sonnenschein, H.F. (1982) Fulfilled expectations Cournot duopoly with information acquisition and release. Bell Journal of Economics 13: 214-218.

Nowak, M.A., Sigmund, K. (1998) Evolution of indirect reciprocity by image scoring. Nature 393: 573-577 .

Nowack, M.A. (2006) Five rules for the evolution of cooperation. Science 314: 1560-1563.

Ok, E.A. (2002) Utility representation of an incomplete preference relation. Journal of Economic Theory 104: 429-449.

Ostrom, E. (1990) Governing the commons: the evolution of institutions for collective action. Cambridge University Press. Cambridge.

Ostrom, E. (2009) A general framework for analyzing sustainability of social-ecological systems. Science 325: 419-422.

Patriche, M. (2014) Existence of equilibrium for multiobjective games in abstract convex spaces. Mathematical Reports 16: 243-252.

Peldschus, F., Zavadskas, E.K. (2005) Fuzzy matrix games multi-criteria model for decision-making in engineering. Informatica 16(1): 107-120.

Picardi, A., Seifert, W. (1977) A tragedy of the commons in the Sahel. Ekistics 43: 297-304.

Porter, M.E., Kramer, M.R. (2006) Strategy and society: the link between competitive advantage and corporate social responsibility. Harvard Business Review 84: 76-92.

Puerto, J., Hinojosa, M.A., Mármol, A.M., Monroy, L., Fernández, F.R. (1999) Solution concepts for multiple objective n-person games. Investigaçao Operacional 19: 193-209.

Raith, M. (1996) A general model of information sharing in oligopoly. Journal of Economic Theory 71(1): 260-288.

Rawls, J. (1971) A theory of justice. Revised Edition. Harvard University Press. Cambridge.

Roberts, J., Sonnenschein, H. (1976) On the existence of Cournot equilibrium without concave profit functions. Journal of Economic Theory 13: 112-117.

Roemer, J. (1999) The democratic political economy of progressive income taxation. Econometrica 67: 1-19.

Roemer, J. (2001) Political competition, theory and applications. Harvard University Press. Boston.

Roemer, J. (2005) Games with vector-valued payoffs and their application to competition between organizations. Economics Bulletin 3(16): 1-13.

Ryu, S., Kim, I. (2011) Conjectures in Cournot duopoly under cost uncertainty. Seoul Journal of Economics 24(1): 73-86.

Sagi, J.S. (2006) Anchored preference relations. Journal of Economic Theory 13(1): 283-295.

Sandmo, A. (1971) On the theory of the competitive firm under price uncertainty. American Economic Review 61: 65-73.

Savage, L.J. (1954) The foundations of statistics. John Wiley. New York.

Scharpf, F.W. (1987) A game-theoretical explanation of inflation and unemployment in western Europe. Journal of Public Policy 7: 227-258.

Scharpf, F.W. (1988) The joint decision trap: lessons from german federalism and european integration. Public Administration 66: 239-278.

Schwartz, E.S. (1977) The valuation of warrants: implementing a new approach. Journal of Financial Economics 4, 79-93.

Scott, A. (1955) The fishery: the objectives of sole ownership. The Journal of Political Economy 63(2): 116-124.

Seidenfeld, T., Schervish, M.J., Kadane, J.B. (1995) A representation of partially ordered preferences. The Annals of Statistics 23(6): 2168-2217.

Shafer, W., Sonnenschein, H. (1975) Equilibrium in abstract economies without ordered preferences. Journal of Mathematical Economics 2: 345-348.

Shapiro, C. (1986) Exchange of cost information in oligopoly. Review of Economic Studies 53: 433-446.

Shapley, L.S. (1959) Equilibrium points in games with vector payoffs. Naval Research Logistics Quaterly 6(1): 57-61.

Snidal, D. (1985) The limits of hegemonic stability theory. International Organization 39: 579-614.

Tabibnia, G., Satpute, A.B., Lieberman, M.D. (2008) The sunny side of fairness: preference for fairness activates reward circuitry (and disregarding unfairness activates self-control circuitry). Psychological Science 19: 339-347.

Thomson, J.T. (1977) Ecological deterioration: local-level rule-making and enforcement problems in Niger, en M. H. Glantz (ed.) Desertification: environmental degradation in and around arid lands, 57-59. Westview Press. Boulder.

Vives, X. (1984) Duopoly information equilibrium: Cournot and Bertrand. Journal of Economic Theory 34: 71-94.

Vogel, D. (2005) The market for virtue: the potential and limits of corporate social responsibility. Brookings Institute. Washington, DC.

Walker, J.M., Gardner, R., Herr, A., Ostrom, E. (2000) Collective choice in the commons: experimental results on proposed allocation rules and votes. Economic Journal 110: 212-234.

Wang, S.Y. (1991) An existence theorem of a Pareto equilibrium. Applied Mathematics Letters 4: 61-63.

Wang, S.Y. (1993) Existence of Pareto equilibrium. Journal of Optimization Theory and Applications 79: 373-384.

Weber, M., Kopelman, S., Messick, D. (2004). A conceptual review of decision making in social dilemmas: applying the logic of appropriateness. Personality and Social Psychology Review 8: 281-307.

Wedekind, C., Milinski, M. (2000) Cooperation through image scoring in humans. Science 288: 850-852.

Wilson, R. (1985) Constraints in social dilemmas: an institutional approach. Annals of Operations Research 183(2): 183-200.

Yu P.L., Li J.M. (2000) Forming win-win strategy. A new way to study game problems research and practice in multiple criteria decision making. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 487: 45-56.

Yu, J., Yuan, G.(1998) The study of Pareto equilibria for multiobjective games by fixed point and Ky Fan mimimax inequality methods. Computers and Mathematics with Applications 35: 17-24.

Zhao, J. (1991) The equilibria of multiple objective games. The International Journal of Game Theory 20: 171-182.

Zeleny, M. (1975) Games with multiple payoff. Interantional Journal of Game Theory 4(4): 179-191.